ICMC – USP

EST5510 – Tópicos de Teoria Assintótica – – $2^{\underline{o}}$/2018

$3^{\underline{a}}$ lista de exercícios

1. Considere a sequência de v.a. $(X_n)_{n\geq 1}$ dada por $X_n(\omega) = \omega/n$ para $\omega \in \Omega = [0,1]$ e uma probabilidade P tal que $P([a,b]) = b - a$, para $a, b \in \Omega$ com $a \leq b$. Prove que $X_n \xrightarrow{\text{D}} X \equiv 0$.

2. Considere o espaço de probabilidade $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, P)$, em que a probabilidade P é definida como no exercício 1. As sequências de v.a. $(X_n)_{n\geq 1}$ e $(Y_n)_{n\geq 1}$, definidas em Ω e com valores em $\mathbb{R}$, são dadas por $X_n(\omega) = nI_{[0,1/n)}(\omega)$ e $Y_n(\omega) = \omega^n$, para todo $\omega \in [0,1]$ e para todo $n \geq 1$, em que $I_A(\omega) = 1$, se $\omega \in A$; 0, caso contrário.
Verifique se as sequências $(X_n)_{n\geq 1}$ e $(Y_n)_{n\geq 1}$ convergem, ou não, quase certamente, em probabilidade, em distribuição e em média de ordem r, para algum $r > 0$.

3. $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ são v.a. independentes com $P(X_n = 0) = 1 - p_n$ e $P(X_n = 1) = p_n$, com $p_n \in (0,1)$ para $n \geq 1$.
(a) Prove que $X_n \xrightarrow{\text{P}} 0$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$. (b) Prove que $X_n \xrightarrow{\text{q.c.}} 0$ se, e somente se, $\sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty$.

4. $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de v.a. i.i.d. com $X_1 \sim \mathsf{uniforme}\big((0,\theta)\big)$, $\theta > 0$. Seja $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$, $n \geq 1$. Prove que $Y_n \xrightarrow{\text{P}} \theta$. Verifique se $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge quase certamente.

5. Suponha que $X \sim \mathsf{Bernoulli}(1/2)$ e que $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de v.a. definida por $X_{2n} = X$ e $X_{2n-1} = 1 - X$, $n \geq 1$. Prove que $X_n \xrightarrow{\text{D}} X$, mas $X_n \stackrel{\text{P}}{\nrightarrow} X$.

6. $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de v.a. tal que $X_n \sim \mathsf{normal}(0, \sigma^2/n)$, $n \geq 1$.
(a) Prove que $X_n \xrightarrow{\text{P}} 0$. (b) Verifique se $(X_n)_{n\geq 1}$ converge, ou não, quase certamente para 0.

7. $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de v.a. tal que $X_n \sim \mathsf{normal}(\mu_n, \sigma_n^2)$, $n \geq 1$, sendo que $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu$ e $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$, $\sigma \in (0,\infty)$. Prove que $X_n \xrightarrow{\text{D}} X \sim \mathsf{normal}(\mu, \sigma^2)$.

8. $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de v.a. i.i.d. com $X_1 \sim \mathsf{exponencial}(1)$. Para $n \geq 2$, defina $Y_n = X_n/\log(n)$.
(a) Prove que $Y_n \xrightarrow{\text{P}} 0$. (b) Prove que $P(|Y_n| \geq 1/2 \text{ i.v.}) = 1$. (c) A partir do item (b), podemos concluir que $Y_n \stackrel{\text{q.c.}}{\nrightarrow} 0$?

9. $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de v.a. tal que $P(X_n = -1) = (2n)^{-1}$, $P(X_n = 0) = 1 - n^{-1}$ e $P(X_n = 1) = (2n)^{-1}$, $n \geq 1$. Prove que $X_n \xrightarrow{\text{P}} 0$ e $X_n \xrightarrow{\text{m.r}} 0$ para todo $r > 0$.

10. $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de v.a. tal que $X_n \sim \mathsf{uniforme}(\{1/n, 2/n, \ldots, 1\})$, $n \geq 1$. Prove que $X_n \xrightarrow{\text{D}} X \sim \mathsf{uniforme}\big((0,1)\big)$.