ICMC – USP

SME 0802 – Inferência I – 2013/1

Alguns outros exercícios

1. Considere $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \textsf{Bernoulli}(\theta)$, $0 < \theta < 1$.

   (a) Apresente um estimador não viesado para θ^2. O estimador encontrado é consistente[1]?

   (b) Com base nas observações

   `1 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 0 1 1`

   apresente uma estimativa para θ^2.

   (c) Qual o menor valor possível da variância de um estimador não viesado para θ^2? A variância do estimador do item 1a é igual a este valor?

2. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da população com função densidade

$$f(x;\theta) = \theta\, x^{\theta-1}\, I_{(0,1)}(x),\ \theta > 0.$$

   Existe uma função $\tau(\theta)$ para a qual é possível obter um estimador não viesado cuja variância é igual ao valor dado pela desigualdade da informação? Se sim, apresente $\tau(\theta)$, seu estimador não viesado e sua variância.

3. Considere $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \textsf{normal}(\theta, 1)$.

   (a) Apresente os menores valores possíveis das variâncias de estimadores não viesados para θ, θ^2 e $P_\theta(X > 0)$.

   (b) Apresente um estimador não viesado para cada uma das funções de θ do item anterior.

4. $T_1 = T_1(\boldsymbol{X})$ e $T_2 = T_2(\boldsymbol{X})$ são dois estimadores independentes e não viesados de θ. Apresente estimadores não viesados para θ^2 e $\theta(1-\theta)$.

5. Suponha que $E(T) = (\theta - 1)/(\theta + 1)$. É possível obter um um estimador não viesado para θ utilizando T?

6. X_1 é uma observação de uma população $\textsf{Poisson}(\theta)$.

   (a) Prove que $(-1)^{X_1}$ e $(-2)^{X_1}$ são estimadores não viesados de $e^{-2\theta}$ e $e^{-3\theta}$, respectivamente. `Sugestão.` $\sum_{x=0}^{\infty} k^x \theta^x / x! = e^{\theta k}$.

   (b) Aponte um aspecto desfavorável dos estimadores do item anterior.

7. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da população com função densidade

$$f(x;\theta) = \exp\{-(x-\theta)\}\, I_{(\theta,\infty)}(x),\ \theta \in \mathbb{R}.$$

   (a) Prove que $T_1(\boldsymbol{X}) = \overline{X} - 1$ e $T_2(\boldsymbol{X}) = \min(X_1, \ldots, X_n) - 1/n$ são estimadores não viesados de θ.

   (b) Qual dos dois estimadores do item anterior você escolheria?

[1] "Estimador consistente" refere-se a uma sequência de estimadores consistente.