

Em todos os exercícios tomamos  $n \rightarrow \infty$ .

1. Prove os seguintes resultados:
  - (a)  $n^2 + 2 = O(n^2 - 3)$ ,
  - (b)  $n^2 + 2 = o(n^3)$ ,
  - (c)  $(-1)^n n^2 = O(n^2)$ ,
  - (d)  $(-1)^n n^2 = o(n^3)$ ,
  - (e)  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = O(\sqrt{n})$  e
  - (f)  $\sin(n) = O(1)$ .
2. Suponha que  $(a_n)_{n \geq 1}$  é uma sequência de números reais. Prove que
  - (a)  $O(O(a_n)) = O(a_n)$ ,
  - (b)  $O(o(a_n)) = o(O(a_n)) = o(o(a_n)) = o(a_n)$ ,
  - (c)  $O(a_n) \mp O(a_n) = O(a_n)$ ,
  - (d)  $o(a_n) \mp o(a_n) = o(a_n)$ ,
  - (e)  $-O(a_n) = O(a_n)$ ,
  - (f) se  $c \neq 0$ , então  $O(c a_n) = O(a_n)$  e  $o(c a_n) = o(a_n)$ ,
  - (g)  $\{O(a_n)\}^2 = O(a_n^2)$ ,
  - (h)  $O(O(a_n)) + O(a_n) = O(a_n)$  e
  - (i)  $1 - (1 - 1/n)(1 - 2/n) = O(n^{-1}) = o(n^{-1/2}) = o(1)$ .
3. Apresente um exemplo com sequências de números reais  $(a_n)_{n \geq 1}$  e  $(b_n)_{n \geq 1}$  tais que  $a_n = O(b_n)$ , mas  $b_n \neq O(a_n)$ .
4. Suponha que  $(a_n)_{n \geq 1}$  e  $(b_n)_{n \geq 1}$  são sequências de números reais. Prove que
  - (a)  $O(a_n)O(b_n) = O(a_n b_n)$ ,
  - (b)  $O(a_n)o(b_n) = o(a_n b_n)$  e
  - (c)  $o(a_n)o(b_n) = o(a_n b_n)$ .
5. Seja  $(X_n)_{n \geq 1}$  uma sequência de variáveis aleatórias definidas no espaço  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Prove que
  - (a)  $O_p(O_p(X_n)) = O_p(X_n)$ ,
  - (b)  $O_p(o_p(X_n)) = o_p(X_n)$ ,
  - (c)  $o_p(O_p(X_n)) = o_p(X_n)$  e
  - (d)  $o_p(o_p(X_n)) = o_p(X_n)$ .
6.  $(X_n)_{n \geq 1}$  é uma sequência de variáveis aleatórias definidas no espaço  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  e  $(a_n)_{n \geq 1}$  é uma sequência de números reais tais que  $E(X_n^2) = O(a_n^2)$ . Prove que  $X_n = O_p(a_n)$ . Este resultado é verdadeiro se  $E(|X_n|) = O(a_n)$ ?
7. Se  $(X_n)_{n \geq 1}$  é uma sequência de variáveis aleatórias definidas no espaço  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  e  $(a_n)_{n \geq 1}$  é uma sequência de números reais tais que  $E(X_n) = O(a_n)$  e  $\text{Var}(X_n) = O(a_n^2)$ , prove que  $X_n = O_p(a_n)$ .
8. Suponha que  $(X_n)_{n \geq 1}$  é uma sequência de variáveis aleatórias definidas no espaço  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(X_n) = 0$ . Prove que  $X_n - c = o_p(1)$ .
9. Suponha que  $(X_n)_{n \geq 1}$  é uma sequência de variáveis aleatórias  $\stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Exp}(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$ . Seja  $Y_n = \min(X_1, \dots, X_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Prove que  $Y_n = O_p(n^{-1}) = o_p(n^\alpha)$  para todo  $\alpha > -1$ .
10. Suponha que  $(X_n)_{n \geq 1}$ ,  $(Y_n)_{n \geq 1}$  e  $(Z_n)_{n \geq 1}$  são sequências de variáveis aleatórias definidas no espaço  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  tais que  $P(Z_n = 0) = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , e  $X_n = O_p(Y_n)$ . Prove que  $X_n Z_n = O_p(Y_n Z_n)$ .