Introdução à Teoria da Confiabilidade

Adaptado de material do
Prof. Vicente G. Cancho (ICMC/USP)

Departamento de Matemática Aplicada e Estatística
Universidade de São Paulo

2023

Introdução à Confiabilidade de Sistemas

O que é confiabilidade?

Introdução à Confiabilidade de Sistemas

O que é confiabilidade?

- A tv de sua casa é confiável?

Introdução à Confiabilidade de Sistemas

O que é confiabilidade?

- A tv de sua casa é confiável?
- Algumas respostas frequentes:

O que é confiabilidade?

- A tv de sua casa é confiável?
- Algumas respostas frequentes:
  - acredito que sim, comprei faz uns 10 anos e ela nunca apresentou qualquer problema,
  - sim, ela funciona bem há mais de oito anos e
  - não, ela já apresentou muitos problema, não compro mais nenhum produto da mesma marca.

Introdução à Confiabilidade de Sistemas

O que é confiabilidade?

- A tv de sua casa é confiável?
- Algumas respostas frequentes:
  - acredito que sim, comprei faz uns 10 anos e ela nunca apresentou qualquer problema,
  - sim, ela funciona bem há mais de oito anos e
  - não, ela já apresentou muitos problema, não compro mais nenhum produto da mesma marca.
- A ideia de confiabilidade está intuitivamente associada ao grau de certeza que se tem no bom funcionamento durante um longo período de tempo.

Introdução à Confiabilidade de Sistemas

O que é confiabilidade?

- A tv de sua casa é confiável?
- Algumas respostas frequentes:
  - acredito que sim, comprei faz uns 10 anos e ela nunca apresentou qualquer problema,
  - sim, ela funciona bem há mais de oito anos e
  - não, ela já apresentou muitos problema, não compro mais nenhum produto da mesma marca.
- A ideia de confiabilidade está intuitivamente associada ao grau de certeza que se tem no bom funcionamento durante um longo período de tempo.
- Do ponto de vista de Engenharia, por exemplo, seria importante poder garantir a confiabilidade de um produto.

Introdução à Confiabilidade de Sistemas

O que é confiabilidade?

- A tv de sua casa é confiável?
- Algumas respostas frequentes:
  - acredito que sim, comprei faz uns 10 anos e ela nunca apresentou qualquer problema,
  - sim, ela funciona bem há mais de oito anos e
  - não, ela já apresentou muitos problema, não compro mais nenhum produto da mesma marca.
- A ideia de confiabilidade está intuitivamente associada ao grau de certeza que se tem no bom funcionamento durante um longo período de tempo.
- Do ponto de vista de Engenharia, por exemplo, seria importante poder garantir a confiabilidade de um produto.
- Esta tarefa, contudo, só seria viável se este grau de certeza pudesse ser medido de alguma forma aceitável.

Conceitos básicos

Confiabilidade de um produto (componente ou sistema) é a probabilidade de bom funcionamento do produto durante período de tempo e condições de uso especificados.

Conceitos básicos

Confiabilidade de um produto (componente ou sistema) é a probabilidade de bom funcionamento do produto durante período de tempo e condições de uso especificados.

Função confiabilidade

- Seja T uma v.a. não negativa que representa o tempo até falha de um componente (ou sistema).

Conceitos básicos

Confiabilidade de um produto (componente ou sistema) é a probabilidade de bom funcionamento do produto durante período de tempo e condições de uso especificados.

Função confiabilidade

- Seja T uma v.a. não negativa que representa o tempo até falha de um componente (ou sistema).
- A função confiabilidade de um componente (ou sistema) no instante t, denotada por $R(t)$, é definida como

$$R(t) = P(T > t).$$

Conceitos básicos

Confiabilidade de um produto (componente ou sistema) é a probabilidade de bom funcionamento do produto durante período de tempo e condições de uso especificados.

Função confiabilidade

- Seja T uma v.a. não negativa que representa o tempo até falha de um componente (ou sistema).
- A função confiabilidade de um componente (ou sistema) no instante t, denotada por $R(t)$, é definida como

$$R(t) = P(T > t).$$

- A função densidade de probabilidade e a função taxa de falha de T são, respectivamente,

$$f(t) = -\frac{dR(t)}{dt} \text{ e } h(t) = -\frac{d}{dt}\log(R(t)).$$

Conceitos básicos

Propriedades da função confiabilidade:

- $R(t)$ é monótona decrescente para $t \geq 0$,
- $0 \leq R(t) \leq 1$,
- $\lim_{t \to 0} R(t) = 0$ e
- $\lim_{t \to \infty} R(t) = 1$.

Exemplo

Suponha que o tempo até a falha de microchips, segue uma distribuição log-normal com $\mu = 9,65$ horas e $\sigma = 0,1053$ horas. Determine a confiabilidade do microchip nas primeiras 20000 horas de uso.

Se T é tempo de vida dos microchips, então $T \sim LN(\mu, \sigma^2)$. A função confiabilidade é

$$R(t) = \Phi\left(-\frac{\log(t) - 9,65}{0,1053}\right).$$

Daí tem-se

$$R(20000) = \Phi\left(-\frac{\log(20000) - 9,65}{0,1053}\right) = 0,008.$$

Isso indica que 99,2% dos microchips falhariam nas 20000 primeiras horas de uso.

Confiabilidade de sistemas

- Muitos sistemas são conectados em série ou em paralelo ou em combinações paralelo-série, série-paralelo ou sistemas k-em-n e o interesse é determinar a confiabilidade do sistema sabendo a confiabilidade das componentes.

Confiabilidade de sistemas

- Muitos sistemas são conectados em série ou em paralelo ou em combinações paralelo-série, série-paralelo ou sistemas *k*-em-*n* e o interesse é determinar a confiabilidade do sistema sabendo a confiabilidade das componentes.

Sistema em série

Suponha que um sistema com n componentes montadas em série,

$$\longrightarrow \boxed{C_1} \rightarrow \boxed{C_2} \rightarrow \cdots \rightarrow \boxed{C_n} \longrightarrow$$

- No sistema em série, todos os componentes do sistema devem funcionar para que o sistema funcione.
- O objetivo é determinar a função confiabilidade do sistema em termos da confiabilidade das componentes.

Sistema em série

- Suponha que as componentes falham independentemente.
- Seja T_i o tempo até a falha da i-ésima componente.
- Seja T o tempo até a falha do sistema.

Por definição, a confiabilidade do sistema é dada por

$$\begin{aligned} R(t) = P(T > t) =& P\left([T_1 > t] \cap [T_2 > t] \cap \cdots \cap [T_n > t]\right) \\ =& P(T_1 > t) P(T_2 > t) \ldots P(T_n > t) \\ =& R_1(t) R_2(t) \times \cdots \times R_n(t), \end{aligned}$$

em que $R_i(t)$ é a função confiabilidade da i-ésima componente.

Sistema em série

- Suponha que as componentes falham independentemente.
- Seja T_i o tempo até a falha da i-ésima componente.
- Seja T o tempo até a falha do sistema.

Por definição, a confiabilidade do sistema é dada por

$$\begin{aligned} R(t) = P(T > t) =& P\left([T_1 > t] \cap [T_2 > t] \cap \cdots \cap [T_n > t]\right) \\ =& P(T_1 > t)P(T_2 > t)\ldots P(T_n > t) \\ =& R_1(t)R_2(t) \times \cdots \times R_n(t), \end{aligned}$$

em que $R_i(t)$ é a função confiabilidade da i-ésima componente.

Observação (1)

Em um sistema em serie com n componentes, o tempo até a falha do sistema é dado por

$$T = \min(T_1, \ldots, T_n).$$

Exemplo (1)

Considere o sistema com quatro componentes formados por motor, embreagem, transmissão e roda montados em série como mostra o esquema abaixo. Supondo que tempo até falha de cada componente é independente e com distribuição exponencial com taxa de falha λ_i, determine a função confiabilidade do sistema.

$$\boxed{Motor} \longrightarrow \boxed{Embreagem} \longrightarrow \boxed{Transmissão} \longrightarrow \boxed{Roda}$$

Seja T_i o tempo até a falha do i-ésimo componente, $i = 1, 2, 3, 4$ com $R_i(t) = \exp(-\lambda_i t),\ t > 0$. Assim,

$$R(t) = exp(-[\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4]t),\ t > 0.$$

Exemplo (2)

Tem-se um sistema de captação de água com quatro bombas montadas em série. Sabe-se que a taxa de falha de cada bomba é constante, $\lambda = 0,00015$ falhas/hora. Determinar a confiabilidade do sistema nas 100 primeiras horas de funcionamento.

Seja T_i o tempo até a falha da i-ésima bomba, $i = 1, 2, 3, 4$ com $R_i(t) = exp(-\lambda t),\ t > 0$. Assim,

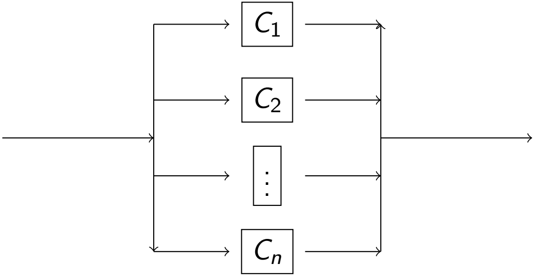
$$R(t) = \exp(-4\lambda t),\ t > 0$$

Daí,

$$R(100) = exp(-4 \times 0,00015 \times 100) = 0,94.$$

Sistema em paralelo

Suponha que um sistema com n componentes montadas em paralelo,



- O sistema em paralelo funciona se pelo menos uma das componentes funciona.
- O objetivo é determinar a função confiabilidade do sistema em termos da confiabilidade das componentes.

Sistema em paralelo

- Suponha que as componentes falham independentemente.
- Seja T_i o tempo até a falha da i-ésima componente.
- Seja T o tempo até a falha do sistema.

Por definição, a confiabilidade do sistema é dada por

$$
\begin{aligned}
R(t) = P(T > t) =& P\left([T_1 > t] \cup [T_2 > t] \cup \cdots \cup [T_n > t]\right) \\
=& 1 - P\left([T_1 \leq t] \cap [T_2 \leq t] \cap \cdots \cap [T_n \leq t]\right) \\
=& 1 - P(T_1 \leq t)P(T_2 \leq t)\ldots P(T_n \leq t) \\
=& 1 - [1 - R_1(t)][1 - R_2(t)]\ldots[1 - R_n(t)],
\end{aligned}
$$

em que $R_i(t)$ é a função confiabilidade da i-ésima componente.

Sistema em paralelo

- Suponha que as componentes falham independentemente.
- Seja T_i o tempo até a falha da i-ésima componente.
- Seja T o tempo até a falha do sistema.

Por definição, a confiabilidade do sistema é dada por

$$\begin{aligned} R(t) = P(T > t) =& P\left([T_1 > t] \cup [T_2 > t] \cup \cdots \cup [T_n > t]\right) \\ =& 1 - P\left([T_1 \leq t] \cap [T_2 \leq t] \cap \cdots \cap [T_n \leq t]\right) \\ =& 1 - P(T_1 \leq t)P(T_2 \leq t) \ldots P(T_n \leq t) \\ =& 1 - [1 - R_1(t)][1 - R_2(t)] \ldots [1 - R_n(t)], \end{aligned}$$

em que $R_i(t)$ é a função confiabilidade da i-ésima componente.

Observação (2)

Em um sistema em paralelo com n componentes, o tempo até a falha do sistema é dado por

$$T = \max(T_1, \ldots, T_n).$$

Exemplo (3)

Tem-se um sistema de captação de água com três bombas montadas em paralelo. Sabe-se que a taxa de falha de cada bomba é constante, $\lambda = 0,02$ falhas/hora. Compare a confiabilidade do sistema ao final de 150 horas com a confiabilidade de uma única bomba.

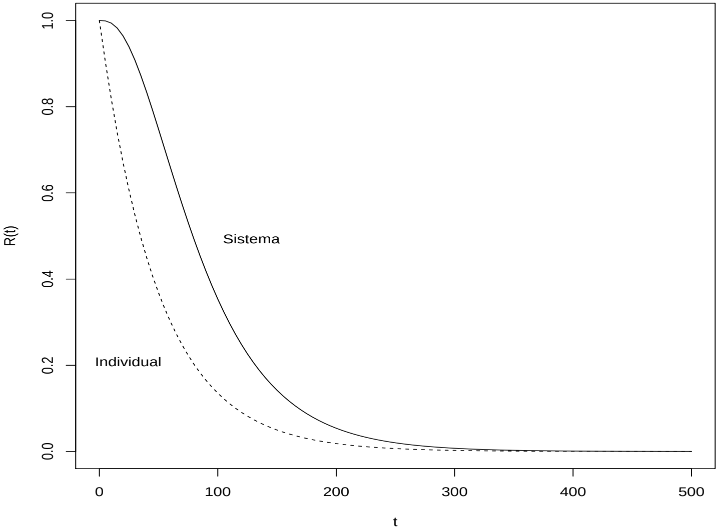
Seja T_i o tempo até a falha da i-ésima bomba, $i = 1,2,3,4$ com $R_i(t) = \exp(-\lambda t),\ t > 0$. Assim,

$$R(t) = 1 - [1 - exp(-\lambda t)]^3,\ t > 0$$

Daí,

$$R(150) = 1 - [1 - exp(-0,02 \times 150)]^3 = 0,142.$$

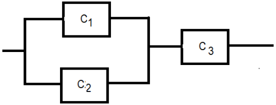
Para uma única componente,
$R_1(150) = \exp(-0,02 \times 150) = 0,049.$



R(t)
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
Sistema
Individual
0
100
200
300
400
500
t

Exercício 1

Um sistema com três componentes que funcionam independentemente está conectado como mostra oesquema abaixo.



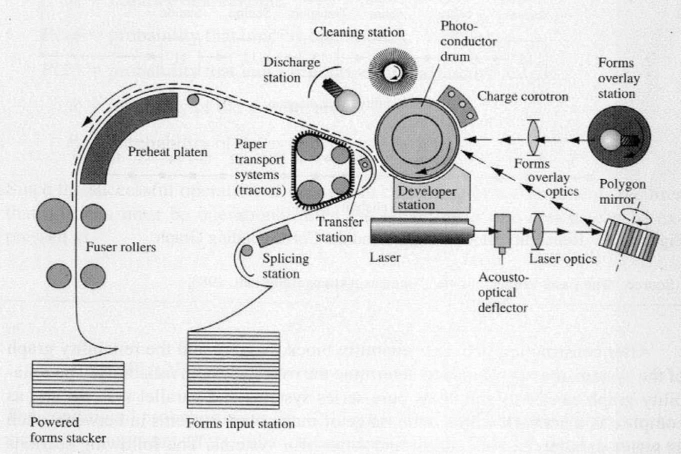
A confiabilidade de cada componente no instante t é dada por

$$R(t) = e^{-0{,}03t}.$$

Se T é o tempo até a primeira falha do sistema, (a) determine a fdp de T e (b) determine a confiabilidade do sistema e compare-o com a confiabilidade de uma das componentes.

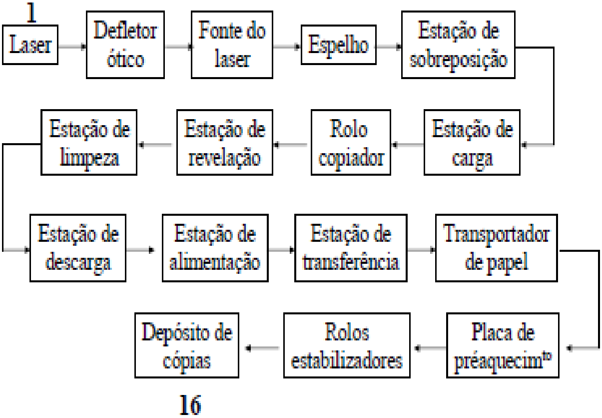
Exercício 2

Um impressora a laser é montada como mostra o esquema abaixo.



Exercício 2

As especificação da montagem é dada na figura abaixo.



Exercício 2

Suponha que os tempos até a falha (horas) de cada componente são independentes com taxas de falha constante igual a $\lambda_i > 0$, $i = 1, \ldots, 16$. Se T é o tempo até a falha (horas) da impressora. Determinar

(a) a confiabilidade do sistema por um período de tempo t.

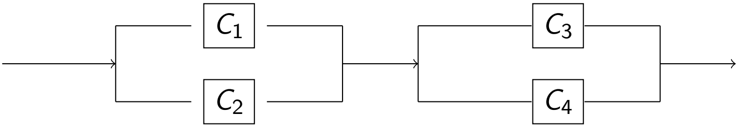
(b) A fdp de T.

(c) A função taxa de falha do sistema.

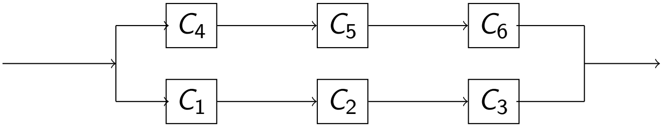
(d) Suponha que $\lambda_i = i/10^4$ $i = 1, 2, \ldots, 16$. Determinar a confiabilidade do sistema por um período de 2 anos.

Combinação de sistemas

Sistema paralelo-série



Sistema série-paralelo



Sistema k em n

- Alguns sistemas ou módulos são construídos com n componentes em paralelo, mas para que o sistema funcione é necessário que pelo menos k das n componentes funcionem.
- Exemplos:
  1. Carros com cinco pneus (um sobressalente) precisam de pelo menos quatro funcionando para poder funcionar.
  2. Sistemas de comunicação com quatro canais, três dos quais devem estar operantes para que o sistema esteja operante.
- A função confiabilidade de um sistema em paralelo k em n, na qual as componentes são independentes e tendo a mesma confiabilidade R, é

$$R_S(k; n, R) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} R^i (1-R)^{n-i} = 1 - F_B(k-1; n, R),$$

em que $F_B(\cdot\,; n, R)$ é a função distribuição acumulada da distribuição binomial com parâmetros n e R.

Exemplo (4)

O sistema S é formado por $n = 3$ bombas de água para resfriamento de um reator. Se as bombas funcionam de forma independente e a sua confiabilidade, ao longo de um período de 1000 horas, é $R = 0,95$, e se pelo menos $k = 2$ bombas devem funcionar para o resfriamento do reator, determine a confiabilidade do sistema.

É um sistema $k = 2$ em $n = 3$. Assim, a confiabilidade do sistema é

$$R_S(2; 3, 0, 95) = \sum_{i=2}^{3} \binom{3}{i} (0, 95)^i (0, 05)^{n-i} = 0, 993.$$

Exemplo (5)

Dois modulos M_1 e M_2 são conectados em série. O módulo M_1 é um sistema 3-em-5 com confiabilidade de cada componente de $R_1 = 0,8$. O modulo M_2 é um sistema 4-em-8 com confiabilidade de cada componente de $R_2 = 0,6$.

(a) *Determine a confiabilidade de cada módulo.*

(b) *Determine a confiabilidade do sistema.*

Exemplo (5)

Dois modulos M_1 e M_2 são conectados em série. O módulo M_1 é um sistema 3-em-5 com confiabilidade de cada componente de $R_1 = 0,8$. O modulo M_2 é um sistema 4-em-8 com confiabilidade de cada componente de $R_2 = 0,6$.

(a) *Determine a confiabilidade de cada módulo.*

(b) *Determine a confiabilidade do sistema.*

A confiabilidade do modulo M_1 é

$$R_S(3; 5, 0, 8) = \sum_{i=3}^{5} \binom{5}{i} (0,8)^i (0,2)^{n-i} = 0,942.$$

A confiabilidade do modulo M_2 é

$$R_S(4; 8, 0, 6) = \sum_{i=4}^{8} \binom{8}{i} (0,6)^i (0,4)^{n-i} = 0,826.$$

A confiabilidade do sistema é

$$R_S = 0,942 \times 0,826 = 0,779.$$