Integração de Monte Carlo

2017

Problema

Para $k > 1$ e $\boldsymbol{v}$ um vetor $k \times 1$ conhecido, definimos a função

$$g(x) = 10^5 \exp(-\sum_{j=1}^{k} |x - v_j|^{1/2}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Problema

Para $k > 1$ e $\boldsymbol{v}$ um vetor $k \times 1$ conhecido, definimos a função

$$g(x) = 10^5 \exp(-\sum_{j=1}^{k} |x - v_j|^{1/2}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx. \tag{1}$$

Problema

Para $k > 1$ e $\boldsymbol{v}$ um vetor $k \times 1$ conhecido, definimos a função

$$g(x) = 10^5 \exp(-\sum_{j=1}^{k} |x - v_j|^{1/2}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx. \tag{1}$$

A Fig. 1 mostra o gráfico de g para $k = 8$ e $\boldsymbol{v} = (-2,0; -1,1; -0,7; -0,3; 0,9; 1,4; 2,2; 3,1)$.

Problema

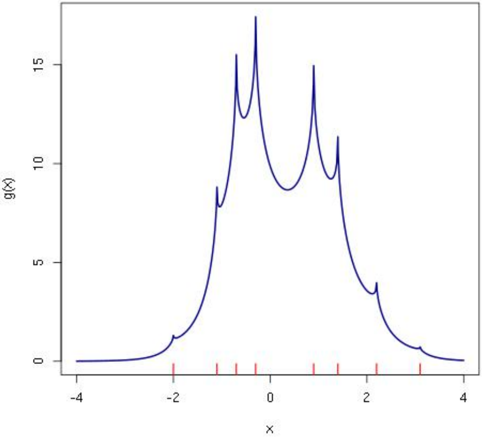

Figura 1: Gráfico da função.

Solução

Tomamos $X \sim \text{normal}(\mu, \sigma^2)$, em que $\mu = \sum_{j=1}^{k} v_j/k$ e $\sigma^2 = 1$, com função densidade de probabilidade $f(x)$.

Solução

Tomamos $X \sim \text{normal}(\mu, \sigma^2)$, em que $\mu = \sum_{j=1}^{k} v_j/k$ e $\sigma^2 = 1$, com função densidade de probabilidade $f(x)$.
A integral em (1) é denotada por θ e pode ser calculada como $\theta = \mathrm{E}[g^*(X)]$, em que $g^*(x) = g(x)/f(x)$ e a esperança se refere a uma variável aleatória normal$(\sum_{j=1}^{k} v_j/k, 1)$.

Solução

Tomamos $X \sim \text{normal}(\mu, \sigma^2)$, em que $\mu = \sum_{j=1}^{k} v_j/k$ e $\sigma^2 = 1$, com função densidade de probabilidade $f(x)$.
A integral em (1) é denotada por θ e pode ser calculada como $\theta = \mathrm{E}[g^*(X)]$, em que $g^*(x) = g(x)/f(x)$ e a esperança se refere a uma variável aleatória normal$(\sum_{j=1}^{k} v_j/k, 1)$.
Portanto,

$$\theta = \int_{-\infty}^{\infty} g^*(x) f(x) dx.$$

Solução

Tomamos $X \sim \text{normal}(\mu, \sigma^2)$, em que $\mu = \sum_{j=1}^{k} v_j/k$ e $\sigma^2 = 1$, com função densidade de probabilidade $f(x)$.
A integral em (1) é denotada por θ e pode ser calculada como $\theta = \mathrm{E}[g^*(X)]$, em que $g^*(x) = g(x)/f(x)$ e a esperança se refere a uma variável aleatória $\text{normal}(\sum_{j=1}^{k} v_j/k, 1)$.
Portanto,

$$\theta = \int_{-\infty}^{\infty} g^*(x) f(x) dx.$$

Uma aproximação de Monte Carlo para esta integral é implementada em linguagem R.

Solução

```
# g(x)
gx <- function(x, v) {
   1e5 * exp(-sum(sqrt(abs(x - v))))
}

# g*(x)
gsx = function(x, muv = 0, v) {
   gx(x, v) / dnorm(x, muv, 1)
}

# Vetor v
v <- c(-2.0, -1.1, -0.7, -0.3, 0.9, 1.4, 2.2, 3.1)
muv <- mean(v)
```

Solução

```
# Gráfico de g(x)
xp <- sort(c(seq(-4, 4, length = 300), v))
gxp <- c()
for (j in 1:length(xp)) {
   gxp[j] <- gx(xp[j], v)
}
```

Solução

```r
# Gráfico de g(x)
xp <- sort(c(seq(-4, 4, length = 300), v))
gxp <- c()
for (j in 1:length(xp)) {
   gxp[j] <- gx(xp[j], v)
}

plot(xp, gxp, type = "l", col = "darkblue", xlab = "x",
      ylab = "g(x)", lwd = 2)
rug(v, col = "red", lwd = 1.5)
```

Solução

```
# Gráfico de g(x)
xp <- sort(c(seq(-4, 4, length = 300), v))
gxp <- c()
for (j in 1:length(xp)) {
   gxp[j] <- gx(xp[j], v)
}

plot(xp, gxp, type = "l", col = "darkblue", xlab = "x",
      ylab = "g(x)", lwd = 2)
rug(v, col = "red", lwd = 1.5)

# Número de repetições e semente
R <- 1e4
set.seed(4381)
```

Solução

```
# Amostras de g*(X)
agsx <- c()
for (j in 1:R) {
   agsx[j] <- gsx(rnorm(1, muv, 1), muv, v)
}
```

Solução

```
# Amostras de g*(X)
agsx <- c()
for (j in 1:R) {
   agsx[j] <- gsx(rnorm(1, muv, 1), muv, v)
}

# Resultados
tetac <- mean(agsx)
epMC <- sqrt(var(agsx) / R)
emax <- qnorm(0.975) * epMC
cat("\n Número de repetições:", R,
    "\n Estimativa (e.p. MC):", tetac, "(", epMC, ")",
    "\n IC de 95% aproximado: (", tetac - emax, ",",
        tetac + emax, ")")
```

Solução

```
Número de repetições: 10000
Estimativa (e.p. MC): 34.77175 ( 0.1147244 )
IC de 95% aproximado: ( 34.54689 , 34.9966 )
```

Solução

```
Número de repetições: 10000
Estimativa (e.p. MC): 34.77175 ( 0.1147244 )
IC de 95% aproximado: ( 34.54689 , 34.9966 )
```

Nota 1. Nas folhas 6 e 7, procure escrever trechos de código sem utilizar `for`.

Solução

```
Número de repetições: 10000
Estimativa (e.p. MC): 34.77175 ( 0.1147244 )
IC de 95% aproximado: ( 34.54689 , 34.9966 )
```

Nota 1. Nas folhas 6 e 7, procure escrever trechos de código sem utilizar `for`.
Nota 2. Apresente outras aproximações baseadas em outras distribuições para a variável aleatória X na folha 4.