12a. Lista de Exercícios de Álgebra Linear - Física 07.11.2012

Problemas envolvendo aplicações de autovalores às equações diferenciais

1. Considere o sistema de equações diferenciais lineares

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots & \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

Ele pode ser escrito na forma de uma equação diferencial matricial $\frac{dX}{dt} = AX$, em que $A = (a_{ij})_{n\times n}$. Suponha que a matriz A seja diagonalizável, ou seja, suponha que exista uma matriz P tal que $P^{-1}AP = D$, em que $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$. Mostre que a solução do sistema é

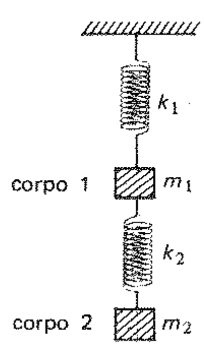
$$X(t) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} P^{-1}X(0), \quad \text{para } t \geq 0.$$

2. Use o exercício 1 para resolver $\frac{dX}{dt} = AX$, quando

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad b)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

e $X(0) = (3, 2)$.

3. Considere o sistema mecânico mostrado na figura abaixo



Utilizando os procedimentos da secção 7.1.5 estude a vibração do sistema quando ele é tirado da posição de equilíbrio. Resolva completamente descrevendo o comportamento do sistema no caso em que $m_1 = 0{,}5$ kg, $m_2 = 0{,}5$ kg, $k_1 = 1{,}2\,\frac{N}{m}$, $k_2 = 1{,}8\,\frac{N}{m}$. Os deslocamentos iniciais dos corpos 1 e 2 são, respectivamente, 0,1 m para cima e 0,2 m para baixo.