Transformações Geométricas 2D

M.C.F. de Oliveira
Rosane Minghim
2007

Transformações Geométricas

- Aplicadas aos modelos gráficos para alterar a geometria dos objetos, sem alterar a topologia
- Porque são necessárias:
  - Para posicionar os objetos em relação ao sistema de coordenadas global (‘*world coordinate system*’) – alterar tamanho, orientação, posição
  - Para ‘mover’ os objetos (gerando uma animação)
  - Para transformar descrições de objetos entre diferentes sistemas de coordenadas
  - Transformações fundamentais: translação, rotação e escala

Sistemas de Coordenadas

- Transformações entre sistemas de coordenadas
  - Aplicações gráficas freqüentemente requerem a transformação de descrições de objetos de um sistema de coordenadas para outro
  - Objeto pode ser descrito em um sistema de objetos não-cartesiano, e precisa ser convertido para um sistema cartesiano
  - Em aplicações de animação e modelagem, objetos individuais definidos em seu próprio sistema de coordenadas (SRO), coordenadas locais (SRO) são depois transformadas para posicionar os objetos no SRU

1) Transformações Fundamentais

Translação:

$$P(x, y) \xrightarrow{\text{trans}} P'(x', y')$$

$$x' = x + dx, \quad y' = y + dy \qquad (1)$$

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \qquad (2)$$

$$P' = P + T \qquad (3)$$

Escala (em relação à origem):

$$P(x, y) \xrightarrow{esc} P'(x', y')$$

$$x' = sx \cdot x, \quad y' = sy \cdot y \qquad (4)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sx & 0 \\ 0 & sy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$P' = S \cdot P \qquad (5)$$

$sx, sy > 0$
$sx, sy > 1.0$
$sx, sy < 1.0$
$sx = sy$
$sx \neq sy$

Rotação (θ) (em relação à origem):

$$P(x, y) \longrightarrow P'$$

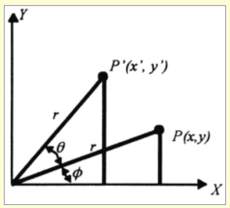
$$x' = x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta\,, \quad y' = x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta \qquad (6)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$P' = R \cdot P \qquad (7)$$

Obs.: Ângulos são definidos como positivos quando a rotação é feita no sentido anti-horário, e negativo caso contrário.

Derivando as equações de rotação (fig.):

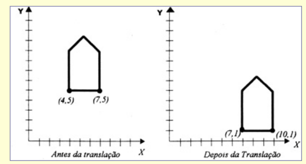


$$x = r \cdot \cos\phi\,, \quad y = r \cdot \sin\phi \qquad (8)$$

$$x' = r \cdot \cos(\theta + \phi) = r \cdot \cos\phi \cdot \cos\theta - r \cdot \sin\phi \cdot \sin\theta$$
$$y' = r \cdot \sin(\theta + \phi) = r \cdot \cos\phi \cdot \sin\theta + r \cdot \sin\phi \cdot \cos\theta \qquad (9)$$

Pode-se obter (6) substituindo (8) em (9)

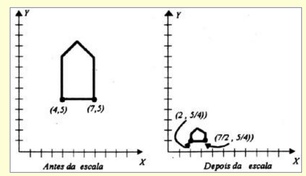
$P_1 = (4, 5)$
$P_2 = (7, 5)$



$P_1' = (7, 1)$
$P_2' = (10, 1)$

Translação de uma casa (3, -4)

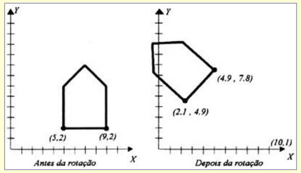
$P_1 = (4, 5)$
$P_2 = (7, 5)$



$P_1' = (2, 5/4)$
$P_2' = (7/2, 5/4)$

Escalonamento (não uniforme) de uma casa (½, ¼)

$P_1 = (5, 2)$
$P_2 = (9, 2)$



Rotação de uma casa (45º)

$P_1' = (2.1, 4.9)$
$P_2' = (4.9, 7.8)$

Observação

- Aplicar qualquer transformação a um objeto é equivalente à aplicar a transformação inversa ao seu sistema de coordenadas!!
- A transformação inversa é descrita pela inversa da matriz que define a transformação original
- Exercício: verifique com os exemplos da apostila!

2) Coordenadas Homogêneas e Matrizes de Transformação

Para a translação, rotação e escala, as matrizes de transformação são, respectivamente:

$$P' = T + P \quad (3)$$
$$P' = R \cdot P \quad (7)$$
$$P' = S \cdot P \quad (5)$$

Para poder combinar facilmente seqüências de transformações, é interessante expressar as 3 como multiplicações matriz-ponto. Isso é possível representando os pontos em Coordenadas Homogêneas. Um ponto (no espaço 2D) representado em coordenadas homogêneas é descrito por três coordenadas:

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ W \end{pmatrix}$$

2) Coordenadas Homogêneas e Matrizes de Transformação

A transformação do sistema homogêneo para o sistema cartesiano se dá pela seguinte relação:

$$(x,y) = (x'/W, y'/W)$$

2) Coordenadas Homogêneas e Matrizes de Transformação

- Dizemos que dois conjuntos de coordenadas homogêneas, [x y W] e [x' y' W'] representam o mesmo ponto se e somente se um é múltiplo do outro

$$(x, y, W) \equiv (x', y', W') \Leftrightarrow \begin{aligned} x' &= tx \\ y' &= ty \\ W' &= tW \end{aligned}$$

- Assim, (2,3,4,6) e (4,6,8,12) são diferentes representações (no espaço homogêneo) para o mesmo ponto (no espaço cartesiano)

2) Coordenadas Homogêneas e Matrizes de Transformação

- Pontos onde W = 0 estão, por definição, fora do espaço vetorial

  (0, 0, 0) não é permitido
  $W = 0 \Rightarrow$ não é permitido

  Se $W \neq 0 \Rightarrow (x/w, y/w, 1)$
  $x/W, y/W \Rightarrow$ coordenadas cartesianas do ponto homogêneo

- Outras vantagens do espaço homogêneo: evita o uso de casas decimais e vírgulas, bem como problemas ocasionados pela representação de números muito grandes
  - (1, 2, 1,1000), (1, 2, 1, 1/1000000)

- Quando W = 1, a transformação entre os espaços é direta
  - $(x,y,1) \equiv (x,y)$

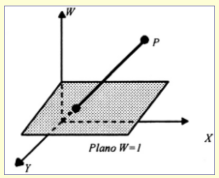


Fig. Espaço de Coordenadas Homogêneas XYW, com plano W=1 e o ponto P = (x, y, W) projetado sobre o plano W = 1.

Obs.: Se tomarmos todas as triplas que representam o mesmo ponto, isto é, todas as triplas da forma (tx, ty, tW), com $t \neq 0$, obtemos uma linha no espaço homogêneo 3D.

- Se "homogeneizamos" o ponto (dividimos por W), obtemos o ponto na forma (x, y, 1).
- Os pontos homogeneizados definem um plano dado pela equação W = 1 no espaço homogêneo (x, y, W).

Translação (Coordenadas Homogêneas)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$P' = T(dx, dy) \cdot P \quad (11)$$

O que acontece se um ponto P é transladado para P' e a seguir para P"?

$$P' = T(dx_1, dy_1) \cdot P \quad (13)$$
$$P'' = T(dx_2, dy_2) \cdot P' \quad (14)$$

$$P'' = T(dx_2, dy_2) \cdot (T(dx_1, dy_1) \cdot P) = (T(dx_2, dy_2) \cdot T(dx_1, dy_1)) \cdot P$$

e

$$T(dx_2, dy_2) \cdot T(dx_1, dy_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & dx_2 \\ 0 & 1 & dy_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & dx_1 \\ 0 & 1 & dy_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

Transformação de Composição

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & dx_1+dx_2 \\ 0 & 1 & dy_1+dy_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T(dx_1+dx_2, dy_1+dy_2)$$

aditiva!

Escala

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$P' = S(sx, sy) \cdot P \quad (18)$$

Aplicando 2 escalas a um ponto P:

$$P' = S(sx_1, sy_1) \cdot P \quad (19)$$

$$P'' = S(sx_2, sy_2) \cdot P' \quad (20)$$

$$P'' = S(sx_2, sy_2) \cdot (S(sx_1, sy_1) \cdot P) = (S(sx_2, sy_2) \cdot S(sx_1, sy_1)) \cdot P$$

e

$$S(sx_2, sy_2) \cdot S(sx_1, sy_1) = \begin{bmatrix} sx_2 & 0 & 0 \\ 0 & sy_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sx_1 & 0 & 0 \\ 0 & sy_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} sx_1 \cdot sx_2 & 0 & 0 \\ 0 & sy_1 \cdot sy_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{S(sx_1 \cdot sx_2, sy_1 \cdot sy_2)}_{\text{multiplicativa!}}$$

Rotação

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$P' = R(\theta) \cdot P \quad (24)$$

Como exercício, mostre que 2 rotações são aditivas

<u>TRANSFORMAÇÕES AFINS</u>:
- Seqüência arbitrária de rotações, translações e escalas.
- Preservam paralelismo de linhas, mas não preservam comprimentos e ângulos

<u>TRANSFORMAÇÕES DE CORPO RÍGIDO</u>:
- Matrizes de transformação da forma

Sub-matriz ortogonal

$$M = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{matrix}} & \begin{matrix} tx \\ ty \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{bmatrix}$$

- Preservam ângulos e comprimentos
- Ex.: Seqüência arbitrária de rotações e translações

3) Composição de Transformações

Combinação de matrizes de transformação R, S e T → <u>Eficiência</u> (uma só transformação composta substitui uma série de transformações sucessivas)

<u>Ex. 01</u>: <u>Rotação</u> de um objeto em torno de um ponto arbitrário P_1:

1) Translação leva P_1 à origem 2) Efetua rotação 3) Efetua translação oposta

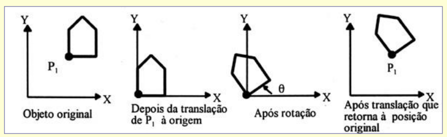


Fig. Rotação em relação a um ponto P1 (θ)

$$T(x_1, y_1) \cdot R(\theta) \cdot T(-x_1, -y_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x_1 \cdot (1-\cos\theta) + y_1 \cdot \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & y_1 \cdot (1-\cos\theta) - x_1 \cdot \sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

<u>Ex. 02</u>: <u>Escala</u> em relação a um ponto arbitrário P_1

(Translação para a origem, Escala, Translação oposta)

$$T(x_1, y_1) \cdot S(sx, sy) \cdot T(-x_1, -y_1) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sx & 0 & x_1 \cdot (1-sx) \\ 0 & sy & y_1 \cdot (1-sy) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

<u>Ex. 03</u>: <u>Escala</u> e <u>Rotação</u> em relação a P_1, posicionamento em P_2

(Translada P_1 para a origem, Efetua escala e rotação desejadas, Translada origem para a nova posição P_2)

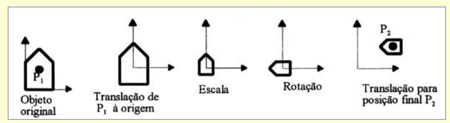


Fig. Escala e Rotação de uma casa

A matriz de transformação é: $T(x_2, y_2) \cdot R(\theta) \cdot S(sx, sy) \cdot T(-x_1, -y_1)$

Obs.: Se M1 e M2 representam duas transformações fundamentais (translação, rotação ou escala), existem alguns casos especiais em que:

$$M_1 \cdot M_2 = M_2 \cdot M_1$$

M1	M2
Translação	Translação
Escala	Escala
Rotação	Rotação
Escala Uniforme	Rotação

Nestes casos, não precisamos nos preocupar com a ordem de construção da matriz de transformação.

(Como exercício, verifique que isto é verdade.)

5) Eficiência

Uma composição genérica de transformações R, S e T, produz uma matriz da forma:

$$M = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & tx \\ r_{21} & r_{22} & ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O cálculo de $M \cdot P$ requer 9 multiplicações e 6 adições. Como a última linha da matriz é constante, os cálculos efetivamente necessários são:

$$x' = x \cdot r_{11} + y \cdot r_{12} + tx$$
$$y' = x \cdot r_{12} + y \cdot r_{21} + ty$$

ou seja, quatro multiplicações, duas adições.

- Uma aplicação em que a eficiência é muito importante é na criação de sucessivas "vistas" de um mesmo objeto. Se cada vista é uma rotação de poucos graus da anterior, e puder ser gerada e apresentada suficientemente rápido, parecerá ao observador que o objeto está sendo rotacionado continuamente (animação!).
- A eficiência é crítica nesse caso em particular (rotações) porque os cálculos envolvidos utilizam funções trigonométricas e várias multiplicações em ponto-flutuante.

- Para obter a velocidade de apresentação necessária, as transformações devem ser efetuadas sobre os pontos do objeto o mais rapidamente possível.
- As equações de rotação (7) requerem 4 multiplicações e 2 adições, além das 4 chamadas às funções trigonométricas.
- Se θ é pequeno (poucos graus), sabemos que $\cos\theta \approx 1$. Nesse caso, podemos simplificar (7) para exigir 2 multiplicações, 2 adições, duas chamadas a funções. **(37)**

$$x' = x - y \cdot \sin\theta$$
$$y' = y + x \cdot \sin\theta$$

- A equação acima aproxima os valores corretos de x', y', mas introduz um erro cumulativo. Uma aproximação melhor usaria x' no lugar de x na 2ª equação:

$$\begin{aligned} x' &= x - y \cdot \sin\theta \\ y' &= x' \cdot \sin\theta + y = \\ &= (x - y \cdot \sin\theta) \cdot \sin\theta + y = \\ &= x \cdot \sin\theta + y \cdot (1 - \sin^2\theta) \end{aligned}$$

Matriz de rotação

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Tomando as duas (três) linhas da sub-matriz 2x2 (3x3) superior esquerda da matriz de rotação como 2 (3) vetores:

  v1 = [$\cos\theta$ - $\sin\theta$], v2 = [$\sin\theta$ $\cos\theta$]

- É possível mostrar que esses vetores apresentam 3 propriedades:
  - São vetores unitários
  - São perpendiculares entre si (seu produto escalar é zero)
  - Se esses vetores forem rotacionados pela matriz R(θ), eles irão se alinhar com as direções positivas dos eixos principais *x* e *y* (e *z*), respectivamente.

- Assumindo que a matriz abaixo é uma matriz de rotação, observe:

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{12} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} \cdot r_{11} + r_{12} \cdot r_{12} \\ r_{21} \cdot r_{11} + r_{22} \cdot r_{12} \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} = 1 \\ = 0 \\ \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{21} \\ r_{22} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} \cdot r_{21} + r_{12} \cdot r_{22} \\ r_{21} \cdot r_{21} + r_{22} \cdot r_{22} \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} = 0 \\ = 1 \\ \end{matrix}$$

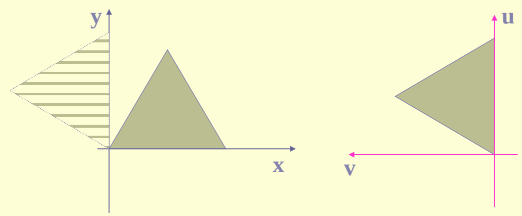
  - lembre que os vetores r_1 e r_2 são unitários.

- Essa informação é útil para derivar a matriz de rotação quando não se conhece o ângulo de rotação a ser aplicado, mas a orientação final desejada para o objeto:
  - definindo dois **vetores unitários ortogonais** entre si, **u** e **v**, que descrevem a orientação desejada para o objeto, a matriz de rotação necessária para reposicionar o objeto original segundo essa orientação é dada por:

$$\begin{bmatrix} u_x & v_x & 0 \\ u_y & v_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Matriz resultante é equivalente à matriz de rotação R(90º)



x = (1,0); **u** = (0,1)

y = (0,1); **v** = (-1,0)

Mudança entre sistemas de coordenadas

- Até o momento, discutimos transformações sobre os pontos que definem um objeto assumindo que esses pontos (antes e depois) são dados relativos a um mesmo sistema de coordenadas.
  - O sistema de coordenadas não se altera...
- Uma forma equivalente de tratar transformações geométricas é como uma mudança entre 2 sistemas de coordenadas: dado um objeto relativo a um sistema de referência, queremos determinar suas coordenadas relativas a um outro sistema.

Mudança entre sistemas de coordenadas

- Para transformar descrições de um objeto dadas em um sistema de referência *Oxy* para um sistema *Ox'y'*, é necessário determinar a transformação que alinha os eixos *x'y'* com os eixos *xy*.
- No exemplo da figura a seguir, isso requer 2 passos: uma translação para alinhar as origens, seguida da rotação que alinha os eixos.

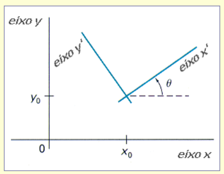


Fig. – Um sistema de coordenadas Cartesiano x'y' posicionado em (x_0, y_0) com orientação θ em um sistema de coordenadas Cartesiano xy.

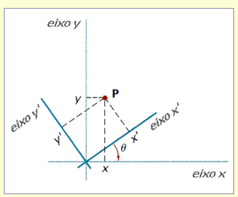


Fig. – Posição do quadro de referência mostrado na figura acima, após transladar o sistema x'y' para que sua origem coincidisse com a origem do sistema xy.

$$M_{xy \rightarrow x'y'} = R(-\theta) \cdot T(-x_0, -y_0)$$

Mudança entre sistemas de coordenadas

- Forma alternativa: usar diretamente os vetores que definem a orientação de Ox'y' para determinar a matriz de rotação

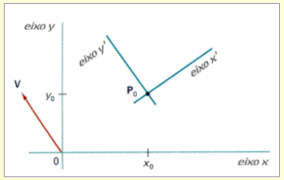


Fig. – Sistema de coordenadas Cartesiano x'y' com origem em $P_0=(x_0, y_0)$ e eixo y' paralelo a um vetor $\bar{V}$.

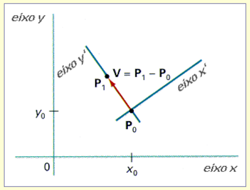


Fig. – Um sistema Cartesiano x'y' definido com duas posições coordenadas, P_0 e P_1, dentro de um quadro de referência xy.

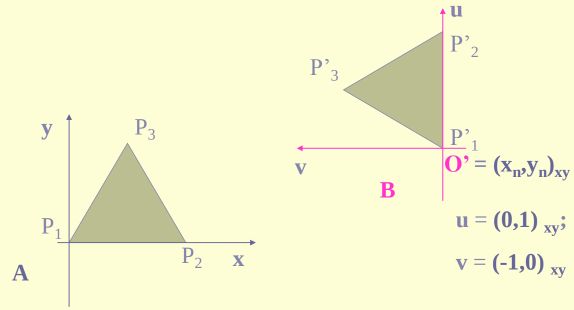
Direção de y' é dada por $\bar{v}$:

$$\bar{v} = \frac{\bar{V}}{|\bar{V}|} = (v_x, v_y)$$

Direção de x' é dada por:

$$\bar{u} = R(-90^o)\cdot\bar{v} = (v_y, -v_x) = (u_x, u_y)$$

Exemplo – transformação como mudança entre sistemas de coordenadas



Exemplo

- Objeto na posição A deve ser transformado para a posição B.
  - Requer uma rotação de 90 em relação ao sistema *Oxy*, seguida de uma translação para O_{uv}
- Problema pode ser tratado como o da conversão do objeto na posição B dado no sistema de referência *Ouv* para o sistema *Oxy*
- Abordagem consiste em alinhar o sistema *Oxy* ao sistema *Ouv*
  - Transformação envolve a rotação de 90 (que alinha os eixos) seguida da translação de (x_n,y_n) que alinha as origens.

- Matriz que transforma as coordenadas do objeto de um sistema *Oxy* para um sistema *Ouv* é denotada: $M_{xy \to uv}$
  - No exemplo, $M_{xy\to uv} = T(x_n,y_n) \,.\, R(90^o)$
- Uma forma alternativa consiste em definir a matriz de rotação em termos dos 2 vetores unitários ortogonais entre si que definem a nova orientação do objeto
  - No caso, **u**= (0,1);**v** = (-1,0)

$$\begin{bmatrix} u_x & u_y & 0 \\ v_x & v_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$