Problemas Intratáveis
ou
computação eficiente
X
computação ineficiente

Problemas Tratáveis

- Os problemas que podem ser resolvidos em tempo polinomial em um computador típico são exatamente os mesmos problemas que podem ser resolvidos em tempo polinomial em uma MT.
- Problemas práticos que exigem tempo polinomial quase sempre podem ser resolvidos em um período de tempo tolerável, enquanto aqueles que exigem tempo exponencial* em geral não podem ser resolvidos, exceto para instâncias pequenas.

** Qualquer tempo de execução de ordem maior que polinomial*

Objetivo

- Teoria da intratabilidade: técnicas para mostrar problemas que não podem ser resolvidos em tempo polinomial *(intratáveis).*
- Vejamos o problema específico (SAT):
  - A questão de saber se uma expressão booleana pode ser *satisfeita*, isto é, tornar-se verdadeira para alguma atribuição de valores verdade TRUE e FALSE a suas variáveis.

O problema da satisfatibilidade

- Esse problema desempenha aqui o seguinte papel: uma vez demonstrado intratável, sua redução a outros problemas nos permite concluir que esses também são intratáveis.
- A noção de redução deve ser alterada: a existência de um algoritmo para transformar instâncias de um problema em instâncias de outro não é mais suficiente. Esse algoritmo deve demorar no máximo um tempo polinomial, ou então a redução não permitirá concluir que o problema de destino é intratável, mesmo que o de origem o seja. Falaremos de ***"redução de tempo polinomial"***

$P \neq NP$

- Enquanto que os resultados da Teoria da Indecidibilidade são irrefutáveis, os da Teoria da Intratabilidade são baseados numa suposição fortemente aceita, porém nunca provada, **a hipótese *P* ≠ *NP***.
- Essa hipótese nos diz que a classe de problemas que podem ser resolvidos por **MTND em tempo polinomial (*NP*)** inclui pelo menos alguns problemas que **não** podem ser resolvidos por MTD em tempo polinomial (*P*), mesmo considerando maior grau do polinômio. Ou seja, embora na forma não determinística o tempo seja polinomial, na forma determinística (i.e, um programa de computador), o tempo é exponencial.

$P \neq NP$

- Há milhares de problemas que *parecem* estar nessa categoria, pois eles podem ser resolvidos facilmente por uma MTND de tempo polinomial, ainda que nenhum programa de computador (ou seja, uma MTD) de tempo polinomial seja conhecido.
- **Consequência**: todos esses problemas ou têm soluções determinísticas de tempo polinomial (que ainda não foram encontradas), ou então nenhum deles tem essas soluções; i.e. todos eles realmente exigem tempo exponencial.

A classe *P*

- Problemas que podem ser resolvidos em tempo polinomial
  - Uma MT M é dita de *complexidade de tempo T(n) (ou que tem tempo de execução T(n))* se, sempre que M recebe uma entrada w de comprimento *n*, M pára depois de efetuar no máximo ***T(n)* movimentos**, independentemente do fato de M aceitar ou não w.
- Dizemos que uma linguagem L está na classe *P* se existe algum polinômio $T(n) = c_1.n^k + c_2.n^{k-1} +...c_{k-1}.n + c_k$, tal que L = L(M) para alguma MT determinística M de complexidade de tempo *T(n)*.

A classe *P*

- A grande maioria dos problemas com que nos deparamos está na classe *P*, ou seja, tem solução em tempo polinomial.

A classe *NP*

- Formalmente, dizemos que uma linguagem L está na classe *NP* (polinomial não determinística) se existe uma MTND M e uma complexidade de tempo polinomial *T(n)* tais que L=L(M) e, quando M recebe uma entrada de comprimento *n*, M para após uma sequência de até *T(n)* movimentos.
- Uma MTND funcionando em tempo polinomial tem a habilidade de pressupor um número exponencial de soluções possíveis para um problema e verificar cada uma, **em tempo polinomial**, ***"em paralelo"***.

A classe *NP*

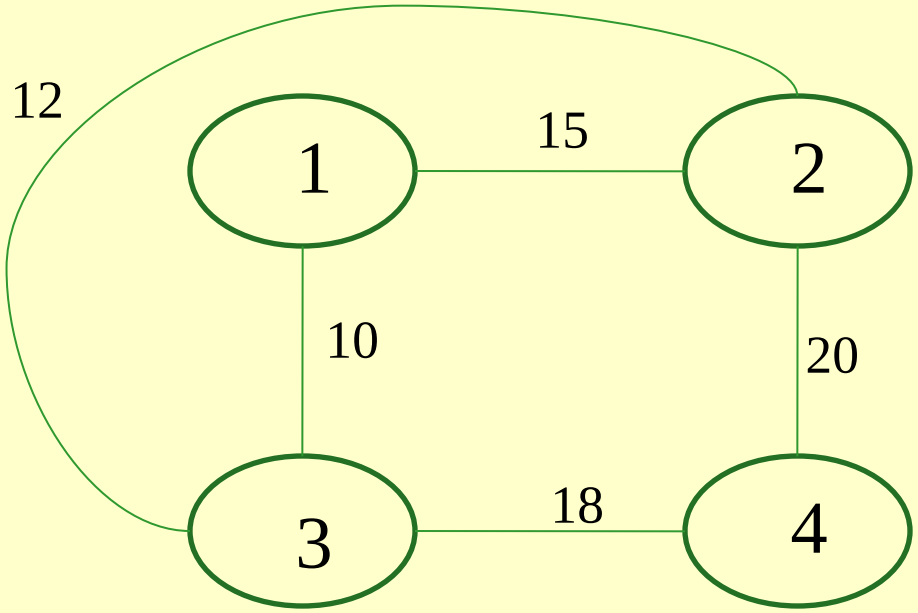
- Considerando que toda MT determinística é uma MTND com no máximo uma opção de movimento, então $\boldsymbol{P \subseteq NP.}$
- Porém, parece que *NP* contém muitos problemas que não estão em *P*.

$P \stackrel{?}{=} NP$

- Uma das principais questões em aberto na Matemática é se $P = NP$, isto é, se de fato tudo o que pode ser feito em tempo polinomial por uma MTND pode realmente ser feito por uma MTD em tempo polinomial, talvez com um polinômio de grau mais alto.

Exemplo em *NP*: o problema do caixeiro viajante (PCV)

- Dado um conjunto de cidades, encontrar um circuito que inclua cada cidade uma única vez, e que represente o trajeto mais econômico.
- **Entrada**: (a) um grafo com ***m*** vértices ou nós, e ***e*** arestas, com pesos inteiros nas arestas; cada nó representa uma cidade, e (b) um limite de peso (custo) W.
- **Pergunta** adaptada à MT: esse grafo tem solução para o PCV com peso total no máximo W?
- **Solução**: verificar a existência de ***circuitos hamiltonianos (CH)***, ou seja, conjuntos de arestas de caminhos cíclicos onde cada nó do grafo ocorre exatamente uma vez; e verificar o peso total (soma dos pesos das arestas) de cada um deles, e comparar com W.



Solução (CH) única para o grafo acima: o ciclo **(1, 2, 4, 3, 1).** O peso total desse ciclo é 15+20+18+10 = 63. Assim, se W ≥ 63, a resposta é “sim”, caso contrário, é “não”.

Em grafos de *m* nós, o número de ciclos distintos cresce como O(m!), que é maior que 2^{cm} para qualquer constante c.

• A solução do PCV envolve a determinação de todos os ciclos hamiltonianos e o cálculo de seus pesos totais.

• Embora algumas escolhas ruins possam ser descartadas, temos que examinar um número exponencial de ciclos para (i) concluir que não existe nenhum com o limite de peso desejado W, ou (ii) descobrir um, dependendo da ordem em que os ciclos são considerados. Num computador determinístico, isso levaria portanto um tempo exponencial.

• Já, se tivermos um computador não-determinístico (MTND), poderíamos, para cada permutação possível dos *m* nós ***(m! permutações)*****,** verificar se (a) é um ciclo hamiltoniano; e (b) calcular seu peso e comparar com W.

• Cada processamento de verificação de uma permutação gastaria tempo polinomial:

- (a) O(*e*) para verificar se é ciclo + O*(m*) para verificar se é hamiltoniano*;*
- (b) O(*e*) para calcular o peso.

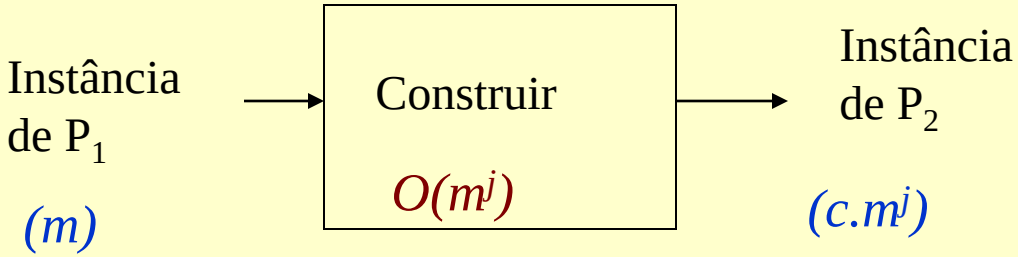
• Ou seja, O(*m*+*e*) (onde *m*+*e* nesse caso representa o tamanho da entrada *n)* é necessário para verificar cada solução-candidata.

•Se cada solução-candidata fosse analisada em paralelo (ou seja, como uma MTND), teríamos um tempo polinomial.

•Sendo assim, o PCV está em *NP*.

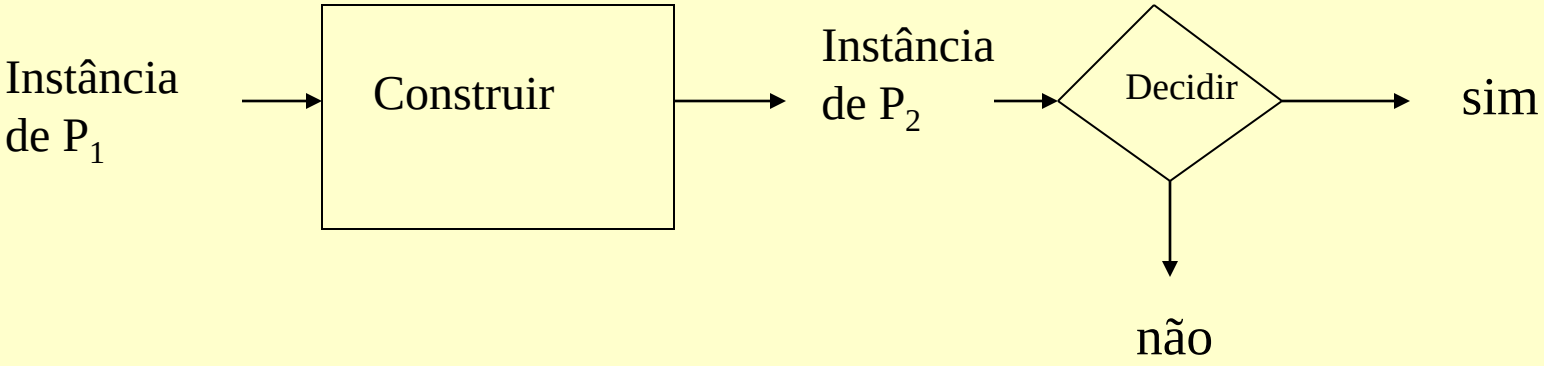
Redução de tempo polinomial

- Uma redução de P_1 a P_2 é em tempo polinomial se ela leva um tempo igual a algum polinômio no comprimento da instância de P_1.
- **Consequência**: a instância de P_2 terá um comprimento polinomial no comprimento da instância de P_1.



Redução de tempo polinomial

- Mostramos que um problema P_2 não pode ser resolvido em tempo polinomial, ou seja, que não está em *P*, por meio da redução de um problema P_1, que "sabemos" que não está em *P*, a P_2.

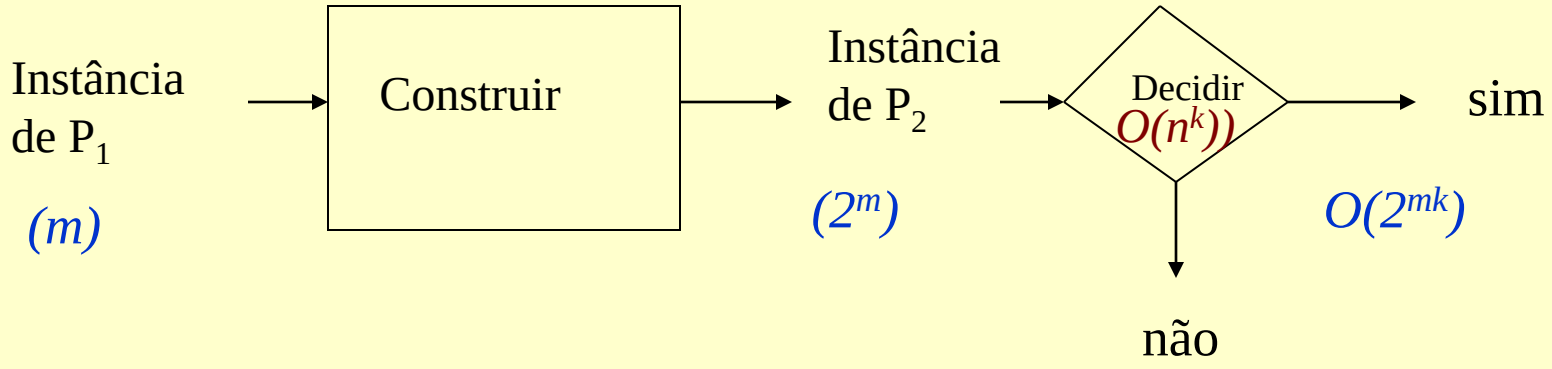


Suponha que queremos provar que "se P_2 está em *P*, então P_1 também está". Como P_1 *não* está em *P*, poderíamos então afirmar que P_2 também não está em *P*.

No entanto, só a existência do algoritmo não é suficiente....

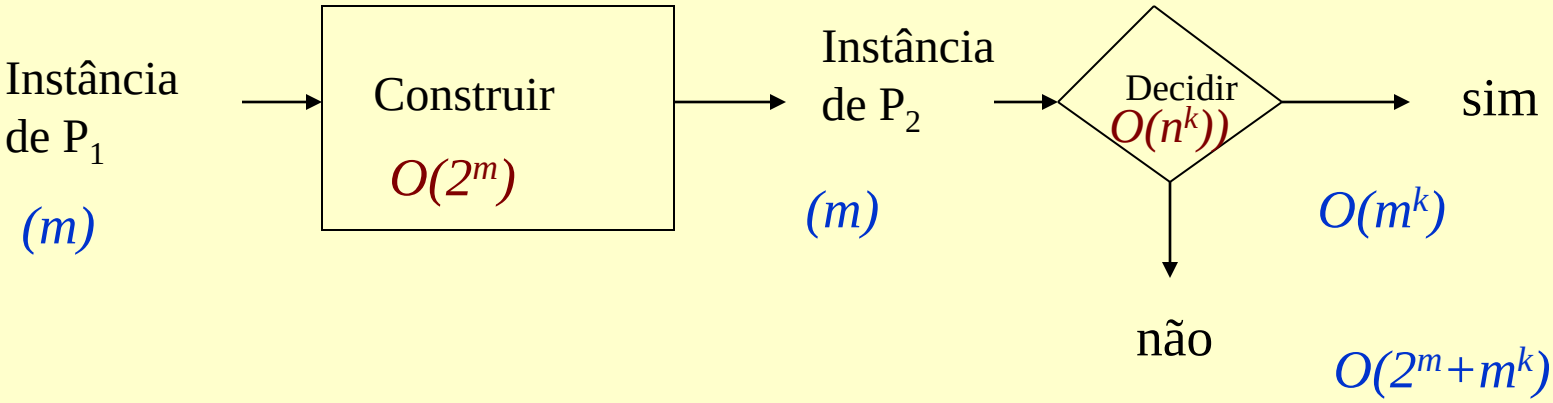
Se "Decidir" é polinomial $(O(n^k))$ e:

- "Construir" produz, para uma instância de P_1 de comprimento m, uma saída de comprimento 2^m. Então "Decidir" vai ser exponencial $O(2^{mk})$. Assim, o algoritmo de decisão para P_1 demora, quando recebe uma entrada de comprimento m, um tempo exponencial em m. Isso é consistente com a situação em que P_2 está em P e P_1 não está em P.



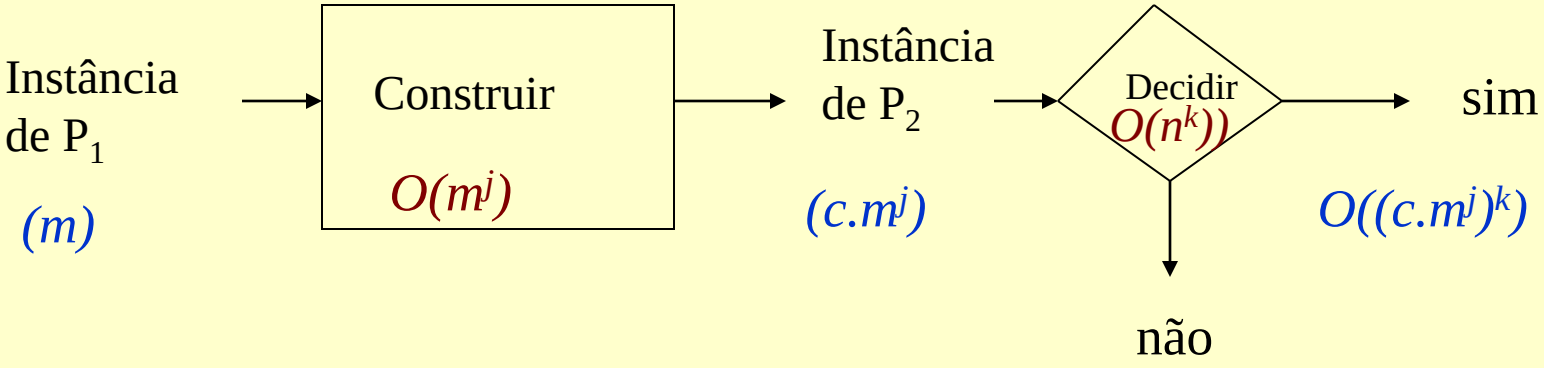
Se “Decidir” é polinomial *(O(n^k))* e:

- “Construir” produz, para uma instância de P_1 de comprimento *m*, uma saída também de comprimento *m*, mas demore para isso um tempo exponencial, digamos *O(2^m)*. Então mesmo se “Decidir” é polinomial em *m*, a única implicação é que um algoritmo de decisão para P_1 vai demorar ***O(2^m + m^k)*** sobre a entrada de comprimento *m*. Isso é novamente consistente com a situação em que P_2 está em *P* e P_1 não está.



Conclusão

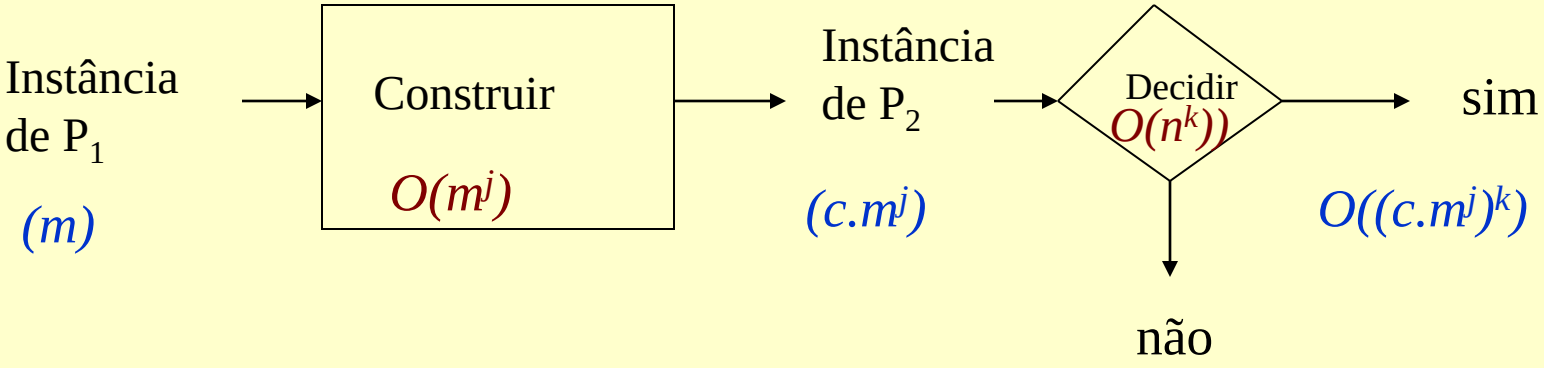
- A simples existência do algoritmo de conversão não nos garante que P_2 herda a propriedade de intratabilidade de P_1.
- Na teoria da intratabilidade, a redução só permite a herança das propriedades de P_1 para P_2 se o tempo de conversão ("Construir") das instâncias de P_1 para P_2 for polinomial no comprimento de sua entrada.
- Note que, se a conversão leva o tempo $O(m^j)$ sobre a entrada de comprimento m, então a instância de saída de P_2 não pode ser mais longa que o número de etapas tomadas, ou seja, ela é no máximo $c.m^j$ para alguma constante c.



Agora podemos provar:

"se P_2 está em P, então P_1 também está". Como P_1 *não* está em P, poderíamos então afirmar que P_2 também não está em P.

- Suponha que "Decidir" leva $O(n^k)$ para decidir sobre uma entrada de comprimento n. Então, podemos resolver a pertinência a P_1 de uma cadeia de comprimento m no tempo $O(m^j + (c.m^j)^k)$, onde m^j define o tempo para realizar a conversão, e o termo $(c.m^j)^k$ é o tempo para resolver a instância resultante de P_2.
- $O(m^j+cm^{jk})$, com c, j, k constantes, é um polinômio em m, e concluímos que P_1 está em P (Absurdo!).



Problemas NP-completos

- Quais linguagens estão em NP e não estão em P?
- Seja L uma linguagem (um problema) em NP. Dizemos que L é *NP-completa* se:
  1. L está em NP.
  2. Para toda linguagem L' em NP, existe uma redução de tempo polinomial de L' a L.

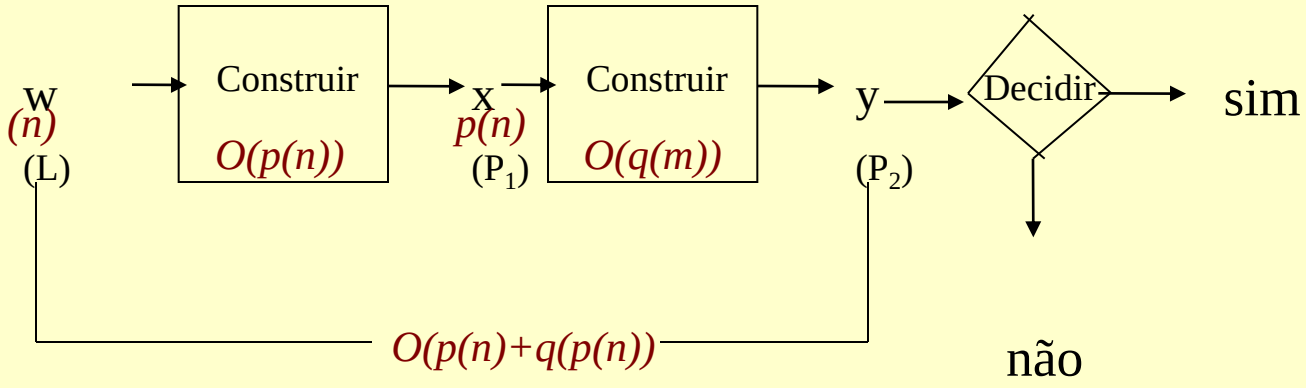
- Como parece que $P \neq NP$ e, em particular, todos os problemas NP-completos estão em $NP - P$, em geral, provar que um problema é *NP-completo* consiste de uma prova de que o problema não está em P.
- **Teorema 1**: Se P_1 é *NP-completo*, P_2 está em *NP* e existe uma redução de tempo polinomial de P_1 a P_2, então P_2 é *NP-completo.*
- Prova: precisamos mostrar que toda linguagem L de *NP* se reduz em tempo polinomial a P_2 *(pela definição de NP-completo)*

Continuação da prova....

Como P_1 é *NP-completo*, sabemos que existe uma redução de tempo polinomial (*p(n)*) de L (qualquer) a P_1. Assim, uma cadeia w em L de comprimento *n* é convertida numa cadeia x em P_1 de comprimento no máximo igual a *p(n)*.

Por hipótese, existe uma redução de tempo polinomial *(q(m))* de P_1 a P_2. Então essa redução transforma x em alguma cadeia y de P_2 em no máximo tempo *q(p(n))*. Assim, a transformação de w em y demora um tempo no máximo igual a *p(n)+q(p(n))*, que é um polinômio em *n*.

Concluímos que L é redutível em tempo polinomial a P_2. Como L pode ser qualquer linguagem de *NP*, mostramos que tudo o que está em *NP* se reduz em tempo polinomial a P_2; isto é, P_2 é *NP-completo*.



- **Teorema 2**: Se algum problema *NP-completo* P estiver em *P* então *P=NP*.
- *Ou seja, se qualquer problema de NP estiver em P, então todos os problemas de NP também estarão em P.*
- Prova: Suponha que P seja *NP-completo* e ao mesmo tempo esteja em *P*. Então todas as linguagens L em *NP* se reduzem em tempo polinomial a P. Se P está em *P*, então L também estaria em *P*.
- Como se acredita que $P \neq NP$, ou seja, que existem muitos problemas em *NP* que não estão *P*, consideramos uma prova de que um problema é *NP-completo* equivalente a uma prova de ele não ter nenhum algoritmo polinomial (i.e. não pertence a *P*) e, portanto, nenhuma boa solução por computador.

Teorema de Cook: O problema SAT é NP-completo.

(veja demonstração na bibliografia)

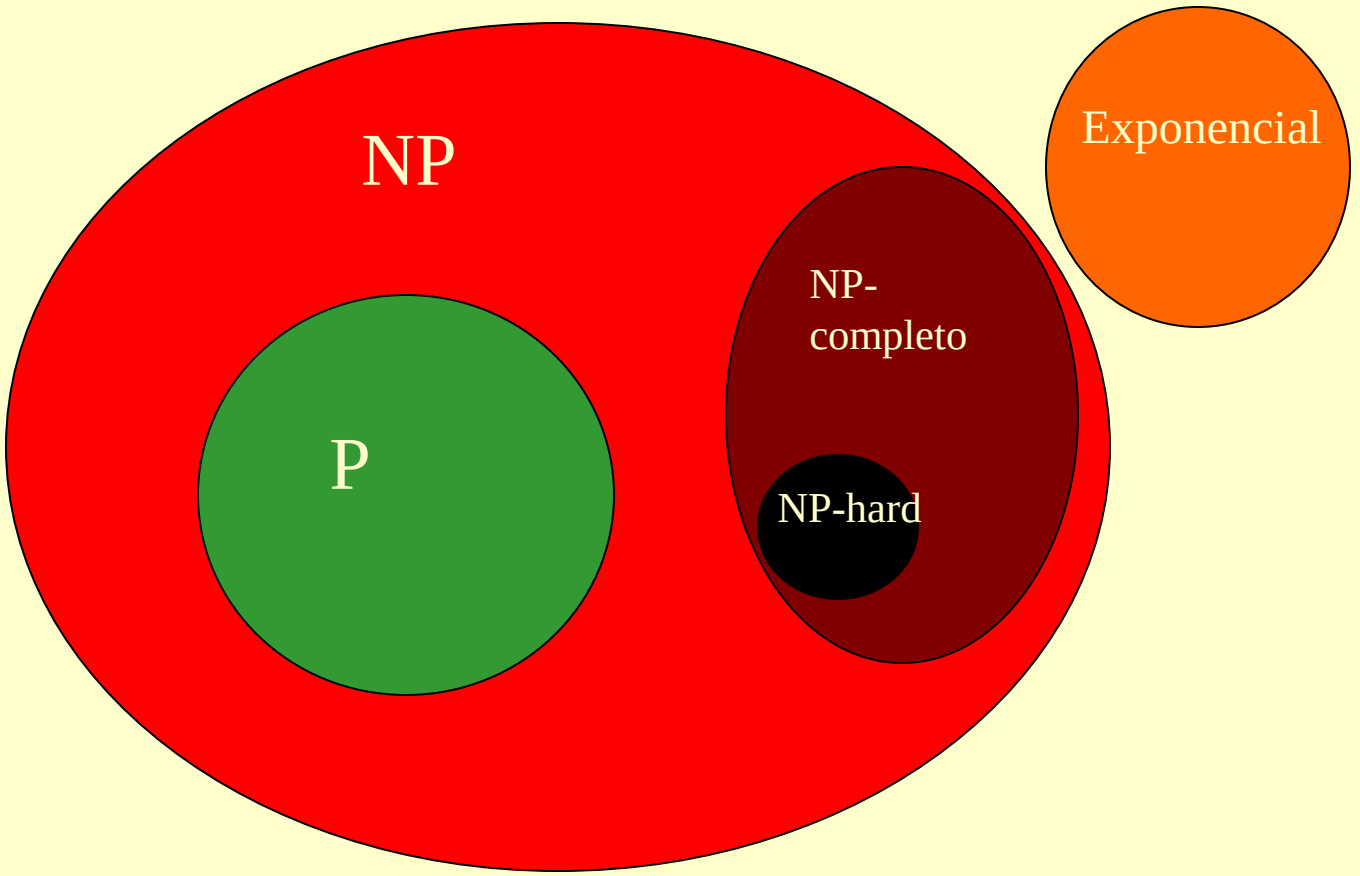
O problema SAT é usado para demonstrar que determinados problemas são *NP-completos*. Faz-se isso por meio da redução de SAT a esses problemas, e invocando o

Teorema 1: ***Se P_1 é NP-completo, P_2 está em NP e existe uma redução de tempo polinomial de P_1 a P_2, então P_2 é NP-completo.***

Problemas NP-difíceis (NP-hard)

- Alguns problemas L são tão difíceis que, embora possamos provar a condição (2) da definição de *NP-completo* (toda linguagem em *NP* se reduz a L em tempo polinomial), não podemos provar a condição (1): que L está em *NP (existe uma MTND)*. Nesse caso, dizemos que L é *NP-difícil (NP-hard)* (pode-se usar o termo "intratável" no sentido de *NP-difícil*).

Problemas comprovadamente Exponenciais



MTND que executa um número de passos exponencial em relação ao tamanho da entrada

Efeitos da NP-completude

1. Quando descobrimos que um problema é *NP-completo*, ele nos diz que existe pouca chance de um algoritmo eficiente poder ser desenvolvido para resolvê-lo. Somos encorajados a procurar por heurísticas, soluções parciais, aproximações ou outros meios. Além disso, podemos fazer isso com a confiança de que não estamos apenas "trapaceando".
2. Cada vez que adicionamos um novo problema *NP-completo*, P, à lista, reforçamos a ideia de que *todos* os problemas *NP-completos* exigem tempo exponencial num computador. O esforço que foi despendido na busca de um algoritmo de tempo polinomial para o problema P foi, não intencionalmente, um esforço dedicado a mostrar que $P=NP$. O resultado desse esforço é a grande evidência de que a) é muito improvável que $P=NP$, e b) *todos* os problemas *NP-completos* exigem tempo exponencial.

Problemas sobre Grafos *NP-completos*

- O Problema do Caixeiro Viajante (encontrar um Ciclo Hamiltoniano)
- O Problema da Cobertura de Nós: *encontrar um conjunto de nós tal que cada aresta do grafo tem pelo menos uma de suas extremidades em um nó do conjunto.*
- O Problema CLIQUE: *verificar se um grafo tem um k-clique, ou seja, um conjunto de k nós tal que existe uma aresta entre todo par de nós no clique.*
- O Problema da Coloração: *um grafo G pode ser "colorido" com k cores?*

- O Problema da Mochila: *dada uma lista de k inteiros, podemos particioná-los em dois conjuntos cujas somas sejam iguais?*
- O Problema do Escalonamento do tempo de execução unitário: *dadas k tarefas T_1, T_2, ...T_k, uma série de "processadores" p, um tempo limite t, e algumas restrições de precedência, da forma $T_i<T_j$ entre tarefas, existe um escalonamento de tarefas tal que: 1) cada tarefa seja atribuída a uma unidade de tempo entre 1 e t; 2) no máximo p tarefas sejam atribuídas a qualquer unidade de tempo, e 3) as restrições de precedência sejam respeitadas: se $T_i<T_j$, então T_i é atribuída a uma unidade de tempo anterior a T_j ?*

Resumo

- *As classes P e NP*. *P* consiste de todas as linguagens ou problemas aceitos por alguma MT que funciona em algum período de tempo polinomial, como uma função do comprimento de sua entrada. *NP* é a classe de linguagens ou problemas que são aceitos por MTND com um limite polinomial sobre o tempo que leva qualquer sequência de escolhas não-determinísticas.
- *A questão P=NP*. Não se sabe se *P* e *NP* são realmente as mesmas classes de linguagens, embora existam fortes suspeitas de que existem linguagens em *NP* que não estão em *P*.
- *Reduções de tempo polinomial.* Se podemos transformar instâncias de um problema em tempo polinomial em instâncias de um segundo problema que tem a mesma resposta – sim ou não – dizemos que o primeiro problema é redutível em tempo polinomial ao segundo.

Resumo

- *Problemas NP-completos:* Uma linguagem é *NP-completa* se está em *NP* e se existe uma redução de tempo polinomial de cada linguagem em *NP* à linguagem em questão. O fato de ninguém jamais ter encontrado um algoritmo de tempo polinomial para qualquer um dos milhares de problemas *NP-completos* conhecidos dá força à crença de que nenhum problema *NP-completo* está em *P*.
- *Problemas de satisfatibilidade NP-completos:* O Teorema de Cook mostrou o primeiro problema NP-completo – se uma expressão booleana é satisfatível – pela redução de todos os problemas em NP ao problema SAT em tempo polinomial.
- *Outros Problemas NP-completos:* Existe uma vasta coleção de problemas NP-completos conhecidos (caixeiro viajante, circuito hamiltoniano, cobertura de nós, etc.); provou-se que cada um deles é NP-completo por meio de uma redução de tempo polinomial de algum problema NP-completo conhecido.