USP/ICMC/SMA - Lista Extra de SMA-333 - CÁLCULO III.

Assunto: Equações de Bessel e de Legendre

1. (Equação de Bessel de ordem zero)

   (a) Quando $p = 0$ a equação Bessel torna-se

   $$x^2y'' + xy' + x^2y = 0.$$

   Verifique que sua equação indicial tem apenas uma raiz e use o método de Frobenius para deduzir que a solução em série de Frobenius é

   $$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2^{2j}(j!)^2} x^{2j}$$

   (b) Chamando de y_1 a única solução em série de Frobenius da equação de Bessel de ordem zero encontrada no item anterior e substituindo a fórmula

   $$y_2(x) = y_1(x) \ln x + x^{m_2} \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$$

   na equação de Bessel de ordem zero, obtenha a segunda solução independente dada por

   $$y_2(x) = y_1(x) \ln x + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{2^{2j}(j!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{j}\right) x^{2j}$$

2. (Equação de Legendre)

   (a) Use o método de séries de potências para resolver a equação diferencial

   $$(1 - x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0.$$

   Aqui p é uma constante real arbitrária. Essa é a equação de Legendre.

   (b) Verifique que se $p = 0$ ou um inteiro par positivo $2n$, uma das soluções independentes obtidas no item anterior se reduz a um polinômio de grau $2n$ e contendo somente potências pares de x. Verifique se p é inteiro ímpar positivo $2n + 1$, a outra solução independente obtida no item anterior se reduz a um polinômio de grau $2n + 1$. Esses polinômios são chamados polinômios de Legendre.