ICMC – USP

EST5510 – Tópicos de Teoria Assintótica – 2º/2017

4ª lista de exercícios

1. A e $(A_n)_{n\geq 1}$ são eventos de um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Prove que $I_{A_n} \xrightarrow{\text{D}} I_A$ se, e somente se, $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$, em que $I_A = 1$, se o evento A ocorre; 0, caso contrário.

2. $F_1, \ldots, F_k$ são funções distribuição e suas respectivas funções características são $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$. Além disso, $\lambda_j \in [0,1]$, para $j = 1, \ldots, k$, são tais que $\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$.

   (a) Prove que $F = \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j F_j$ é uma função distribuição.

   (b) Prove que a função característica correspondente a F é dada por $\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j \varphi_j$.

   (c) Apresente a função característica de uma variável aleatória com distribuição exponencial dupla (ou Laplace) com parâmetros de localização e escala iguais a 0 e 1, respectivamente.

3. Prove que se φ é uma função característica, então $\mathrm{Re}(\varphi)$ e $|\varphi|^2$ também são funções características, em que $\mathrm{Re}(\varphi)$ denota a parte real de φ.
   Sugestão. $\mathrm{Re}(\varphi) = (\varphi + \overline{\varphi})/2$ e $|\varphi|^2 = \varphi\,\overline{\varphi}$.

4. Considere $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{Cauchy}(\mu, \sigma)$, com $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma \in (0, \infty)$. Prove que $(X_1 + \cdots + X_n)/n$ tem a mesma distribuição de X_1.

5. $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes. Sejam $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ e φ_j a função característica de X_j, $j = 1, \ldots, n$. Suponha que $S_n \xrightarrow{\text{q.c.}} S$. Prove que a função característica de S é dada por $\prod\limits_{j=1}^{\infty} \varphi_j(t)$, para $t \in \mathbb{R}$.

6. $(X_n)_{n\geq 1}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$ e X são variáveis aleatórias em um mesmo espaço de probabilidade.
   (a) Prove que se $X_n \xrightarrow{\text{D}} X$ e $X_n - Y_n \xrightarrow{\text{P}} 0$, então $Y_n \xrightarrow{\text{D}} X$.
   (b) Prove que convergência em probabilidade ($X_n \xrightarrow{\text{P}} X$) implica convergência em distribuição ($X_n \xrightarrow{\text{D}} X$).

7. Considere $(X_n)_{n\geq 1}$ tal que $X_n \xrightarrow{\text{D}} X \sim \mathsf{normal}(0, \sigma^2)$ e $Y_n \xrightarrow{\text{D}} Y \equiv \sigma^2$, com $\sigma^2 \in (0, \infty)$. Apresente a distribuição limite de $(X_n^2/Y_n)_{n\geq 1}$.

8. Seja $W_n = c_n X_n + Y_n$, em que $c_n = n^{-1}$, $X_n \sim \mathsf{Cauchy}(0,1)$ e $Y_n \sim \mathsf{normal}(0,1)$, para $n \geq 1$.
   (a) A variável W_n tem momentos?
   (b) Apresente a distribuição limite de $(W_n)_{n\geq 1}$, quando $n \to \infty$.
   (c) Há uma contradição entre os itens (a) e (b)?

9. $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias tal que $X_n \xrightarrow{\text{D}} X$.
   (a) Prove que se $Y_n = X_n + o_p(1)$, então $Y_n \xrightarrow{\text{D}} X$.
   (b) Prove que se $W_n = X_n\{1 + o_p(1)\}$, então $W_n \xrightarrow{\text{D}} X$.