$5^{\underline{a}}$ LISTA DE EXERCÍCIOS DE INT. À INF. ESTATÍSTICA - SME 0122

Para o exercício 1, considere **o erro quadrático médio (EQM)** de um estimador $\widehat{\theta}$ de θ:

$$EQM(\widehat{\theta}, \theta) = E(\widehat{\theta} - \theta)^2 = \mathrm{Var}(\widehat{\theta}) + b(\widehat{\theta}),$$

em que $b(\widehat{\theta})$ é o vício do estimador.

Exercício 1. *(Bussab e Morettin 37, p. 327)*
Suponha que X tenha uma distribuição uniforme no intervalo $(0, \theta)$, onde θ é desconhecido. Uma amostra de n observações $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é retirada. Sabemos que $E(X) = E(X_i) = \theta/2$ e $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(X_i) = \theta^2/12$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Logo, se calcularmos a média amostral $\overline{X}$, essa deve estar próxima de $\theta/2$ e podemos estimar θ por $\widehat{\theta} = 2\overline{X}$.

(a) Calcule $E(\widehat{\theta})$.
(b) Calcule $EQM(\widehat{\theta})$.
(c) $\widehat{\theta}$ é consistente? Por quê?

Exercício 2. *(Bussab e Morettin 6 p. 307)*
Estamos estudando o modelo $y_t = \mu + \epsilon_t$, para o qual uma amostra de cinco elementos produziu os seguintes valoes para $y_t : 3, 5, 6, 8, 16$.

(a) Calcule os valores de $S(\mu) = \sum_t (y_t - \mu)^2$, para $\mu = 6, 7, 8, 9, 10$, e faça o gráfico de $S(\mu)$ em relação a μ. Qual o valor de μ que parece tornar mínimo $S(\mu)$?
(b) Derivando $S(\mu)$ em relação a μ, e igualando o resultado a zero, você encontrará o EMQ de μ. Usando os dados acima, encontre a estimativa para μ e compare com o resultado do item anterior.
(c) Estar entre 0 e 2.

Exercício 3. *(Bussab e Morettin 7 p. 307)*
Os dados abaixo referem-se ao índice de inflação (y_t) de 1967 a 1979 (t).

Ano	1967	1969	1971	1973	1975	1977	1979
Inflação	128	192	277	373	613	1236	2639

(a) Faça o gráfico de y_t contra t.
(b) Considere ajustar o modelo $y_t = \alpha + \beta t + \epsilon_t$ aos dados. Encontre as estimativas de mínimos quadrados de α e β.
(c) Qual seria a inflação em 1981?
(d) Você teria alguma restrição em adotar o modelo linear nesse caso?

Exercício 4. *(Bussab e Morettin 8 p. 308)*
No Exercício 3, determinamos os estimadores de mínimos quadrados para o modelo $y_t = f(t) + \epsilon_t$, com $f(t) = \alpha + \beta t$. Suponha agora que

$$f(t) = \alpha + \beta x_t, y = 1, \ldots, n,$$

ou seja, temos n valores fixos $x_1, \ldots, x_n$ de uma variável fixa (não-aleatória) x. Obtenha os estimadores de mínimos quadrados de α e β para esse modelo.

Exercício 5. *(Bussab e Morettin 45 p. 329)*
Obtenha o estimador de λ na Poisson, pelo método dos momentos.

Exercício 6. *(Bussab e Morettin 12 p. 310)*
Suponha que X seja uma v.a. com distribuição normal, com média μ e variância 1. Obtenha o EMV de μ, para uma amostra de tamanho n, $(X_1, \ldots, X_n)$.

Exercício 7. *(Bussab e Morettin 13 p. 310)*
Considere Y uma v.a. com distribuição de Poisson, com parâmetro $\lambda > 0$. Obtenha o EMV de λ, baseado numa amostra de tamanho n.

Exercício 8. *(Walpole et al. 9.82 p. 199)*
Considere uma amostra de n observações de uma distribuição Weibull com parâmetros α e β e função densidade

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^{\beta}}, x > 0 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases},$$

para $\alpha, \beta > 0$.

(a) Escreva a função de verossimilhança
(b) Escreva as equações que, quando resolvidas, fornecem os estimadores de máxima verossimilhança de α e β.

Exercício 9. *(Walpole et al. 9.85 p. 199)*
Considere um experimento hipotético no qual um homem com um fungo usa uma droga antifúngica e é curado. Considere isso, então, uma amostra de uma distribuição de Bernoulli com função de probabilidade

$$f(x) = p^x q^{1-x}, x = 0, 1,$$

em que p é a probabilidade de sucesso (cura) e $q = 1 - p$. É claro, a informação da amostra fornece $x = 1$. Escreva um desenvolvimento que msotra que $\hat{p} = 1,0$ é o estimador de máxima verossimilhança da probabilidde de cura.

Exercício 10. *(Meyer 14.4 p.365)*
Uma variável aleatória X tem f. d. p.

$$f(x) = (\beta + 1)x^{\beta},\ 0 < x < 1.$$

(a) Calcule o estimador de máxima de verossimilhança baseado numa amostra de tamanho n.
(b) Calcule a estimativa de MV quando os valores amostrais forem: 0,3; 0,8; 0,27; 0,35; 0,62 e 0,55.

Exercício 11. *(Meyer 14.8 p.366)*
Suponha que X seja uniformemente distribuído sobre $(-\alpha, \alpha)$. determine a estimativa de MV de α, baseada em uma amostra de tamanho n.

Exercício 12. *(Meyer 14.9 p.366)*

(a) Um procedimento é realizado até que um particular evento A ocorra pela primeira vez. Em cada repetição, $P(A) = p$; suponha que sejam necessárias n_1 repetições. Depois, esse experimento é repetido e, agora, n_2 repetições são necessárias para produzir-se o evento A. Se isso foi feito k vezes, obteremos a amostra $n_1, \ldots, n_k$. Baseando-se nessa amostra, determine o estimador de MV de p.
(b) Admita que k seja bastante grande. Determine o valor aproximado de $\mathrm{E}(\hat{p})$ e $\mathrm{Var}(\hat{p})$, em que é o estimador de MV obtido em (a).

Exercício 13. *(Meyer 14.15 p.367)*
Suponha que X tenha uma distribuição gama; isto é, sua f. d. p. seja dada por

$$f(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{r-1} \mathrm{e}^{-\lambda x}}{\Gamma(r)}, x > 0.$$

Suponha que r seja conhecido e seja $X_1, \ldots, X_n$ uma a. a. de X. Determine o estimador de MV de λ baseado nesta amostra.