Distribuição Rayleigh

Métodos dos momentos e de máxima verossimilhança (MV)

Colaboração de Vítor Gratiere Torres

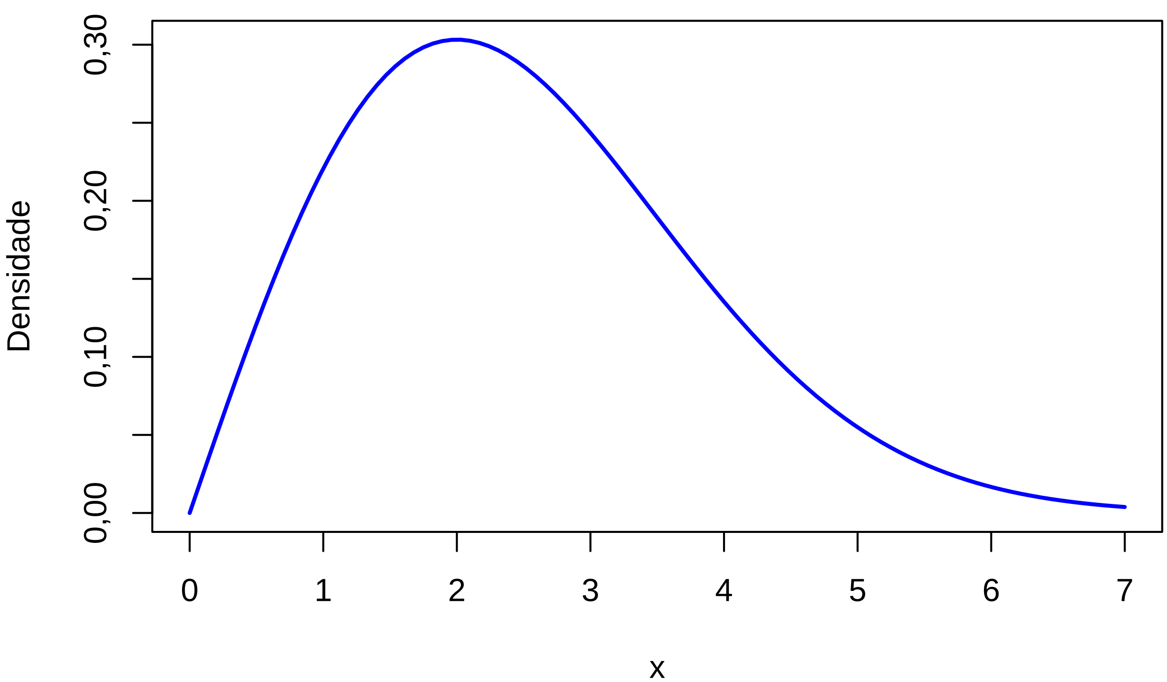
2023

Neste exemplo são avaliadas algumas propriedades de dois estimadores do parâmetro da distribuição Rayleigh, que é utilizada em problemas de confiabilidade em Engenharia. Esta distribuição é um caso particular da distribuição Weibull em que o parâmetro de forma tem valor igual a 2.

Utilizamos simulação de Monte Carlo implementada em linguagem R.

```r
# Separador decimal: ","
options(OutDec = ",")
```

```r
# Função densidade
drayleigh <- function(x, lambda = 1) {
    return(x * exp(-0.5 * x^2 / lambda^2) / lambda^2)
}
curve(drayleigh(x, lambda = 2), col = "blue", lwd = 2, 0, 7,
      ylab = "Densidade")
```



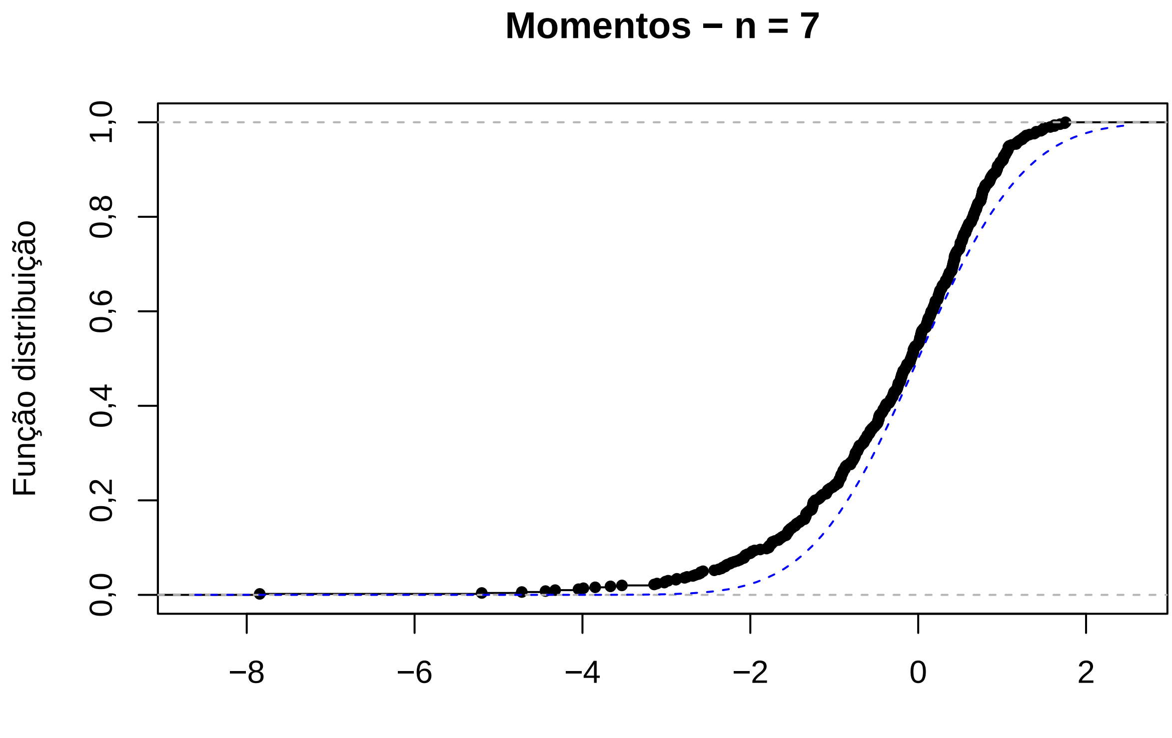
Denotando o parâmetro da distribuição por λ, a média é igual a

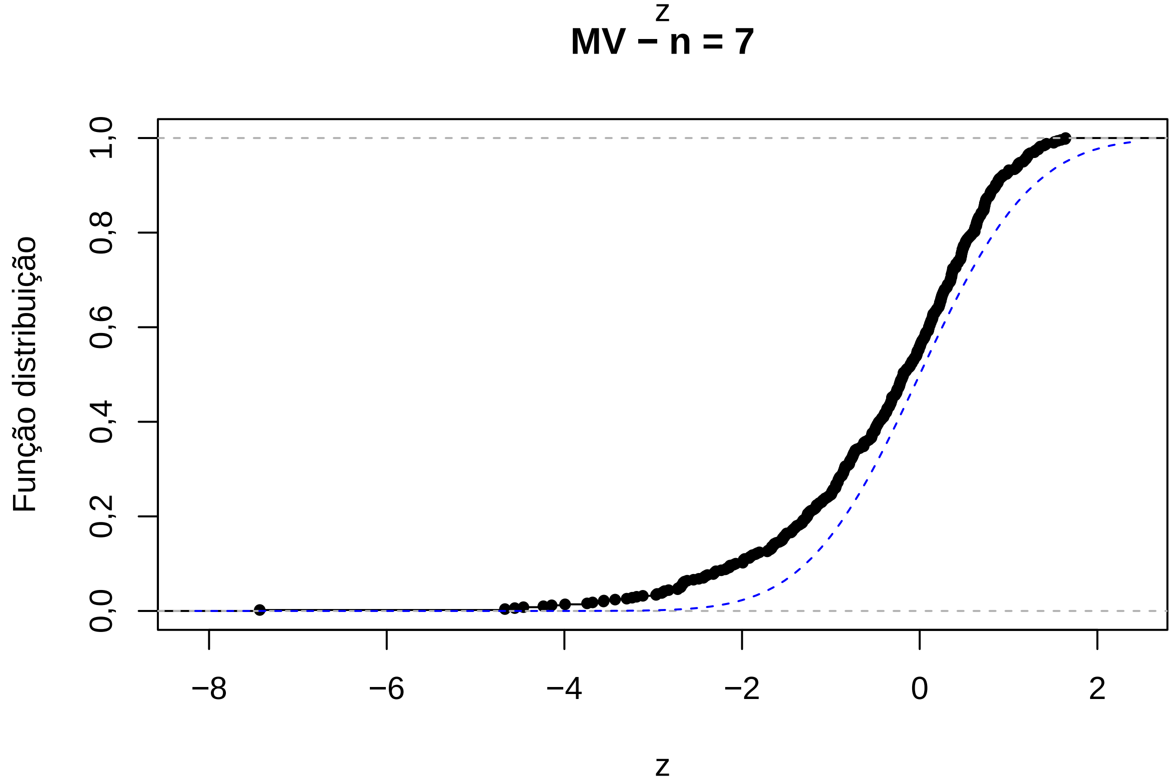
$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\lambda. \qquad (1)$$

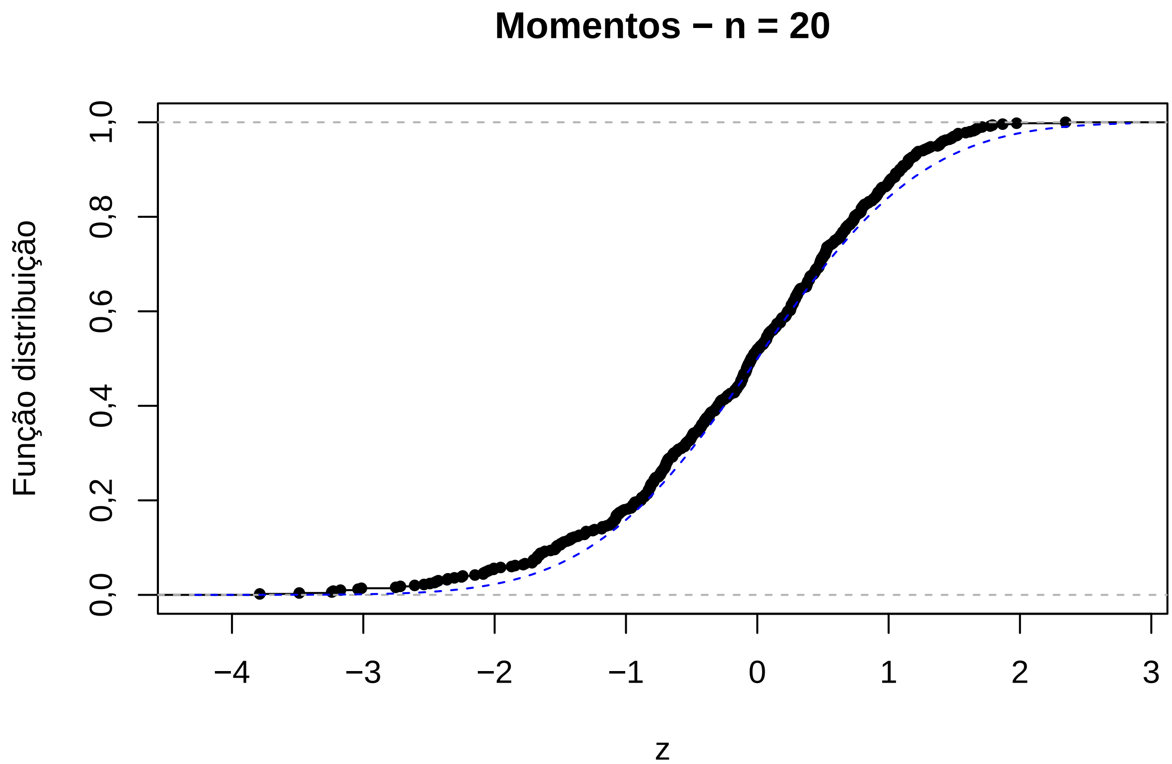
```r
R <- 500     # Número de repetições
lambda <- 2  # Verdadeiro valor
tamanho <- c(7, 20, 50)  # Tamanhos amostrais
resultt <- resultc <- matrix(NA, length(tamanho), 7)  # Resultados
```

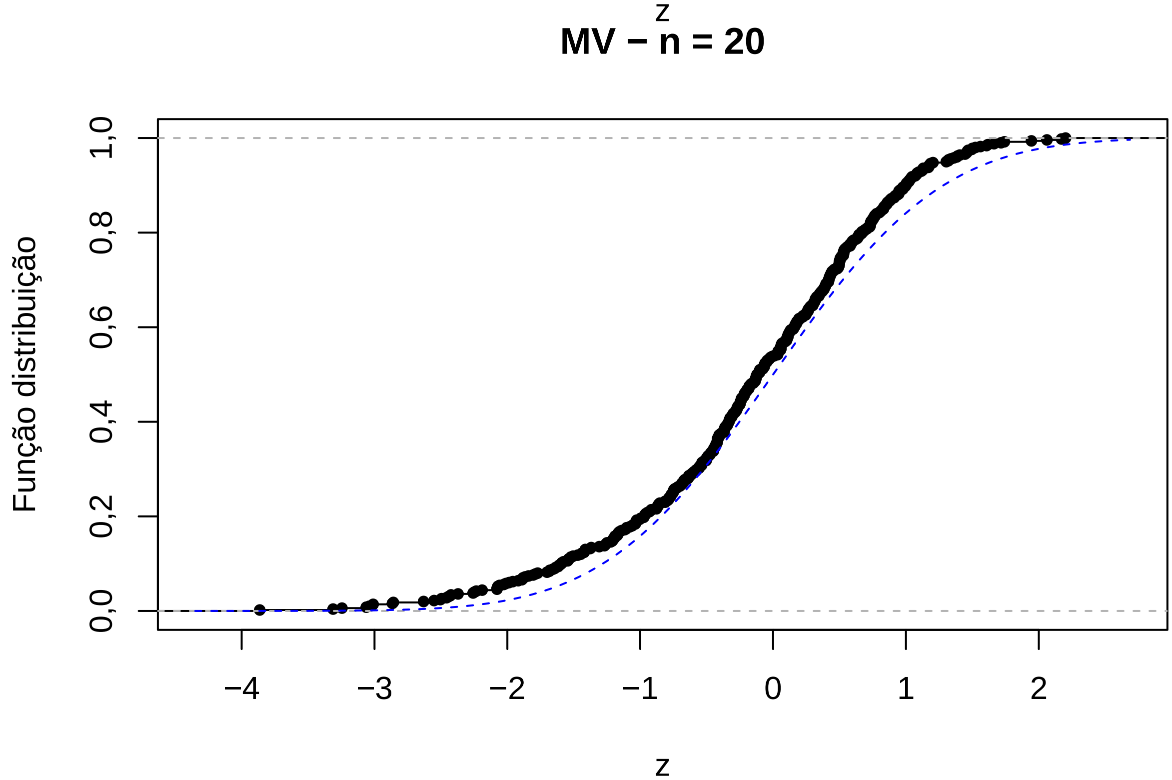
No código abaixo são geradas amostras de diferentes tamanhos, estimativas de momentos e de MV são calculadas com seus respectivos erros padrão (ep) aproximaodos. Ao final são calculadas as médias das estimativas, os desvios padrão das estimativas (ep empírico) e a raiz dos erros quadráticos médios simulados (REQM). Também é realizado o teste de bondade de ajuste Kolmogorov-Smirnov (KS) das estimativas padronizadas. O estimador de momentos é obtido da expressão (1).

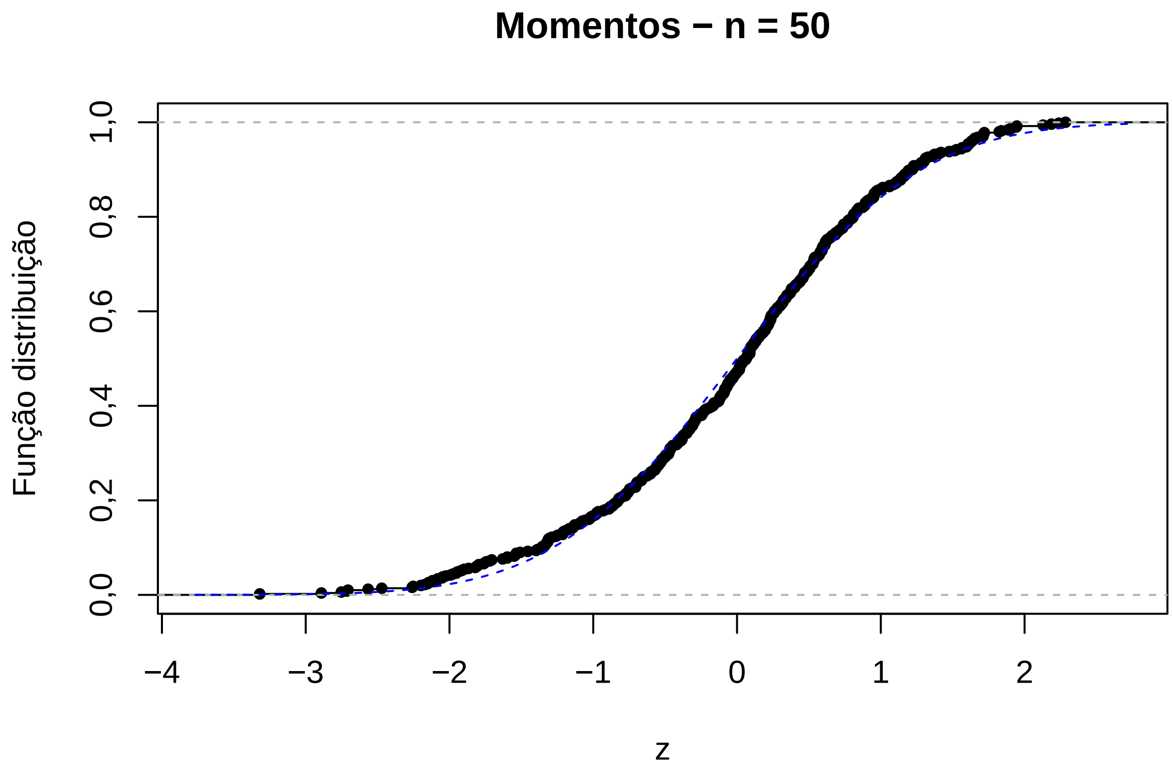
```r
set.seed(2578)
lambdat <- lambdac <- c()  # Estimativas
nc <- 0
for(n in tamanho) {
    nc <- nc + 1
    for(k in 1:R) {
        # Amostra
        x <- lambda * sqrt(-2 * log(runif(n)))
        # Método dos momentos
        lambdat[k] <- sqrt(2 / pi) * mean(x)
        # Método de MV
        lambdac[k] <- sqrt(0.5 * mean(x^2))
    }
    # Erros padrão
    ept <- sqrt(4 / pi - 1) * lambdat / sqrt(n)
    epc <- 0.5 * lambdac / sqrt(n)

    # Padronização
    zt <- (lambdat - lambda) / ept
    zc <- (lambdac - lambda) / epc

    # Gráficos e teste KS de Z
    plot(ecdf(zt), pch = 20, main = paste("Momentos - n =", n),
         ylab = "Função distribuição", xlab = "z")
    curve(pnorm, add = TRUE, col = "blue", lty = 2)
    mytestt <- ks.test(zt, "pnorm")

    plot(ecdf(zc), pch = 20, main = paste("MV - n =", n),
         ylab = "Função distribuição", xlab = "z")
    curve(pnorm, add = TRUE, col = "blue", lty = 2)
    mytestc <- ks.test(zc, "pnorm")

    # Resultados
    resultt[nc, ] <- c(n, mean(lambdat), sd(lambdat), mean(ept),
                 sqrt(mean((lambdat - lambda)^2)), mytestt$statistic,
                 mytestt$p.value)
    resultc[nc, ] <- c(n, mean(lambdac), sd(lambdac), mean(epc),
                 sqrt(mean((lambdac - lambda)^2)), mytestc$statistic,
                 mytestc$p.value)
}
```

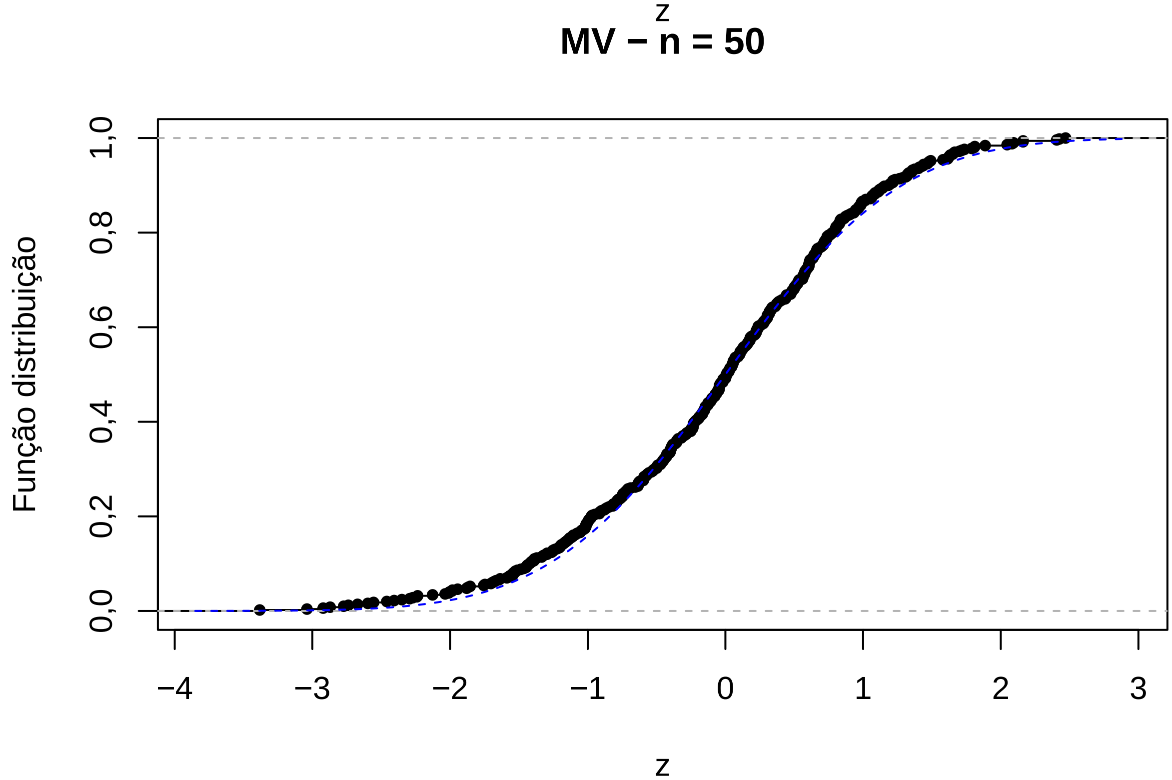

Momentos − n = 7
Função distribuição
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
−8
−6
−4
−2
0
2
z


MV − n = 7
Função distribuição
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
−8
−6
−4
−2
0
2
z


Momentos − n = 20
Função distribuição
0,0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
z


MV − n = 20
Função distribuição
0,0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
−4
−3
−2
−1
0
1
2
z





Por último, os resultados são organizados em tabelas e mostrados com três casas decimais.

```
colnames(resultt) <- colnames(resultc) <- c("n", "Média", "SD",
        "ep", "REQM", "KS", "valor-p")
rownames(resultt) <- c("Momentos", rep("", length(tamanho) - 1))
rownames(resultc) <- c("MV", rep("", length(tamanho) - 1))
```

```r
print(round(resultt, 3))
```

```
##           n Média    SD    ep  REQM    KS valor-p
## Momentos  7 1,964 0,385 0,388 0,386 0,090   0,001
##          20 1,996 0,229 0,233 0,228 0,048   0,198
##          50 2,007 0,147 0,148 0,147 0,041   0,360
```

```r
print(round(resultc, 3))
```

```
##     n Média    SD    ep  REQM    KS valor-p
## MV  7 1,935 0,368 0,366 0,374 0,106   0,000
##    20 1,983 0,214 0,222 0,214 0,066   0,026
##    50 2,002 0,142 0,142 0,142 0,036   0,551
```

Nota 1. Os resultados acima eram esperados?

Nota 2. Apresente as probabilidades de cobertura de intervalos de confiança de 95% aproximados.