

1. Seja  $X$  uma variável aleatória com função densidade  $f(x; \theta) = \theta x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x)$ ,  $\theta > 0$ . No teste de  $H_0 : \theta \leq 1$  contra  $H_1 : \theta > 1$  utilizando uma amostra aleatória de duas observações, a região crítica  $R = \{(x_1, x_2) \in (0, 1) \times (0, 1) : x_1 x_2 \geq 3/4\}$  foi proposta.
  - (a) Represente graficamente esta região crítica.
  - (b) Encontre a função poder e o tamanho deste teste.
  - (c) O teste proposto é UMP?
2.  $(X_i, Y_i)'$  são vetores aleatórios independentes tais que  $Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i \sim \text{normal}(0, \lambda_i + \beta_1^2 \kappa_i)$ , em que  $\lambda_i$  e  $\kappa_i$  são constantes positivas conhecidas,  $i = 1, \dots, n$ , e  $(\beta_0, \beta_1)'$  é o vetor de parâmetros a estimar. Apresente uma quantidade pivotal (e sua distribuição) que permita obter uma região de confiança para  $(\beta_0, \beta_1)'$ .
3.  $X$  é uma variável aleatória com valores no conjunto  $\{1, 2, 3\}$  com probabilidades  $\theta^2$ ,  $2\theta(1-\theta)$  e  $(1-\theta)^2$ , respectivamente,  $0 < \theta < 1$ . Em uma amostra de  $n$  observações,  $X_1, X_2$  e  $X_3$  representam as contagens dos valores 1, 2 e 3, com  $X_1 + X_2 + X_3 = n$ . Apresente um teste assintótico com nível de significância  $\alpha$  para  $H_0 : \theta = \theta_0$  contra  $H_1 : \theta \neq \theta_0$ .
4. Com base em uma observação de uma população com função densidade

$$f(x; \theta) = \frac{2}{\theta^2}(\theta - x)I_{(0,\theta)}(x), \quad \theta > 0$$

apresente um intervalo de confiança de  $100(1 - \alpha)\%$  para  $\theta$ . Calcule a amplitude do intervalo obtido e explique como obter o intervalo de amplitude mínima.

5.  $X_1, \dots, X_n$  é uma amostra aleatória de uma população **gama** $(\theta_1, \theta_2)$  com função densidade

$$f(x; \boldsymbol{\theta}) = \frac{\theta_2^{\theta_1}}{\Gamma(\theta_1)} x^{\theta_1-1} e^{-\theta_2 x} I_{(0,\infty)}(x), \quad \theta_1 > 0 \text{ e } \theta_2 > 0.$$

Em cada uma das situações abaixo, mostre que existe um teste UMP e apresente a forma da região crítica do teste obtido.

- (a)  $H_0 : \theta_1 \leq \theta_{10}$  contra  $H_1 : \theta_1 > \theta_{10}$ , sendo que  $\theta_2 = \theta_{20}$  é conhecido.
- (b)  $H_0 : \theta_2 \leq \theta_{20}$  contra  $H_1 : \theta_2 > \theta_{20}$ , sendo que  $\theta_1 = \theta_{10}$  é conhecido.

*Justifique suas respostas.*