

# 1. Simulação Estocástica e Números Pseudoaleatórios

USP/ICMC

1º/2021

# Simulação

Simulação estocástica é a **arte** de gerar amostras de variáveis aleatórias em um ambiente computacional e usar essas amostras para a obtenção de um certo resultado (Bustos & Frery, 1992, *Simulação Estocástica – Teoria e Algoritmos*, ABE, São Paulo-SP).

# Simulação

Simulação estocástica é a **arte** de gerar amostras de variáveis aleatórias em um ambiente computacional e usar essas amostras para a obtenção de um certo resultado (Bustos & Frery, 1992, *Simulação Estocástica – Teoria e Algoritmos*, ABE, São Paulo-SP).

Arte? Necessitamos de muitas técnicas para atingir o(s) objetivo(s) (Teoria dos Números, Probabilidade, Processos Estocásticos, Estatística, Computação, Análise Numérica, . . .)

# Simulação

Simulação estocástica é a **arte** de gerar amostras de variáveis aleatórias em um ambiente computacional e usar essas amostras para a obtenção de um certo resultado (Bustos & Frery, 1992, *Simulação Estocástica – Teoria e Algoritmos*, ABE, São Paulo-SP).

Arte? Necessitamos de muitas técnicas para atingir o(s) objetivo(s) (Teoria dos Números, Probabilidade, Processos Estocásticos, Estatística, Computação, Análise Numérica, . . .)

Variáveis aleatórias? Muitos problemas ou são de natureza não determinística ou porque é mais apropriado o tratamento estocástico.

# Simulação

Simulação estocástica é a **arte** de gerar amostras de variáveis aleatórias em um ambiente computacional e usar essas amostras para a obtenção de um certo resultado (Bustos & Frery, 1992, *Simulação Estocástica – Teoria e Algoritmos*, ABE, São Paulo-SP).

Arte? Necessitamos de muitas técnicas para atingir o(s) objetivo(s) (Teoria dos Números, Probabilidade, Processos Estocásticos, Estatística, Computação, Análise Numérica, . . .)

Variáveis aleatórias? Muitos problemas ou são de natureza não determinística ou porque é mais apropriado o tratamento estocástico.

Ambiente computacional? A complexidade e/ou o volume de dados impedem a busca de uma solução manual.

# Simulação

Simulação estocástica é a **arte** de gerar amostras de variáveis aleatórias em um ambiente computacional e usar essas amostras para a obtenção de um certo resultado (Bustos & Frery, 1992, *Simulação Estocástica – Teoria e Algoritmos*, ABE, São Paulo-SP).

Arte? Necessitamos de muitas técnicas para atingir o(s) objetivo(s) (Teoria dos Números, Probabilidade, Processos Estocásticos, Estatística, Computação, Análise Numérica, . . .)

Variáveis aleatórias? Muitos problemas ou são de natureza não determinística ou porque é mais apropriado o tratamento estocástico.

Ambiente computacional? A complexidade e/ou o volume de dados impedem a busca de uma solução manual.

Certo resultado? O **bom** uso da simulação estocástica fornece resultados **aproximados**.

# Geração de Variáveis Aleatórias

Variáveis aleatórias i.i.d.  $\text{Uniforme}(0,1)$ .

# Geração de Variáveis Aleatórias

Variáveis aleatórias i.i.d. **Uniforme(0,1)**.

Procedimentos para geração de números **pseudoaleatórios**: as sequências geradas, embora sejam determinísticas, devem ter a “aparência” de aleatoriedade.



# Geração de Variáveis Aleatórias

Variáveis aleatórias i.i.d. **Uniforme(0,1)**.

Procedimentos para geração de números **pseudoaleatórios**: as sequências geradas, embora sejam determinísticas, devem ter a “aparência” de aleatoriedade.

Testes de geradores de números aleatórios.

# Geração de Variáveis Aleatórias

Variáveis aleatórias i.i.d. **Uniforme(0,1)**.

Procedimentos para geração de números **pseudoaleatórios**: as sequências geradas, embora sejam determinísticas, devem ter a “aparência” de aleatoriedade.

Testes de geradores de números aleatórios.

Período da sequência, precisão, repetibilidade e portabilidade.

# Alguns geradores

## G1. Gerador de von Neumann (1949)

## Alguns geradores

G1. Gerador de von Neumann (1949)

- 1  $x_0$ : número de quatro algarismos decimais (**semente**). Faça  $i = 0$ .

## Alguns geradores

### G1. Gerador de von Neumann (1949)

- 1  $x_0$ : número de quatro algarismos decimais (**semente**). Faça  $i = 0$ .
- 2 Calcular  $x_i^2$ . Se necessário, acrescentar zeros à esquerda para que  $x_i^2$  seja escrito como  $d_7d_6d_5d_4d_3d_2d_1d_0$ , em que  $d_j \in \{0, 1, \dots, 9\}$ , para  $j = 0, 1, \dots, 7$ .

## Alguns geradores

### G1. Gerador de von Neumann (1949)

- 1  $x_0$ : número de quatro algarismos decimais (**semente**). Faça  $i = 0$ .
- 2 Calcular  $x_i^2$ . Se necessário, acrescentar zeros à esquerda para que  $x_i^2$  seja escrito como  $d_7d_6d_5d_4d_3d_2d_1d_0$ , em que  $d_j \in \{0, 1, \dots, 9\}$ , para  $j = 0, 1, \dots, 7$ .
- 3 Fazer  $x_{i+1} = d_5d_4d_3d_2$  (**meio do quadrado**).

## Alguns geradores

### G1. Gerador de von Neumann (1949)

- 1  $x_0$ : número de quatro algarismos decimais (**semente**). Faça  $i = 0$ .
- 2 Calcular  $x_i^2$ . Se necessário, acrescentar zeros à esquerda para que  $x_i^2$  seja escrito como  $d_7d_6d_5d_4d_3d_2d_1d_0$ , em que  $d_j \in \{0, 1, \dots, 9\}$ , para  $j = 0, 1, \dots, 7$ .
- 3 Fazer  $x_{i+1} = d_5d_4d_3d_2$  (**meio do quadrado**).
- 4 Faça  $i = i + 1$  e retorne ao passo 2 até que  $i = n$ .

## Alguns geradores

### G1. Gerador de von Neumann (1949)

- 1  $x_0$ : número de quatro algarismos decimais (**semente**). Faça  $i = 0$ .
- 2 Calcular  $x_i^2$ . Se necessário, acrescentar zeros à esquerda para que  $x_i^2$  seja escrito como  $d_7d_6d_5d_4d_3d_2d_1d_0$ , em que  $d_j \in \{0, 1, \dots, 9\}$ , para  $j = 0, 1, \dots, 7$ .
- 3 Fazer  $x_{i+1} = d_5d_4d_3d_2$  (**meio do quadrado**).
- 4 Faça  $i = i + 1$  e retorne ao passo 2 até que  $i = n$ .
- 5 Divida os elementos da sequência por 10.000.

Exemplos:

(a)  $\{2100, 4100, 8100, 6100, 2100, \dots\}$ ,



## Alguns geradores

### G1. Gerador de von Neumann (1949)

- 1  $x_0$ : número de quatro algarismos decimais (**semente**). Faça  $i = 0$ .
- 2 Calcular  $x_i^2$ . Se necessário, acrescentar zeros à esquerda para que  $x_i^2$  seja escrito como  $d_7d_6d_5d_4d_3d_2d_1d_0$ , em que  $d_j \in \{0, 1, \dots, 9\}$ , para  $j = 0, 1, \dots, 7$ .
- 3 Fazer  $x_{i+1} = d_5d_4d_3d_2$  (**meio do quadrado**).
- 4 Faça  $i = i + 1$  e retorne ao passo 2 até que  $i = n$ .
- 5 Divida os elementos da sequência por 10.000.

Exemplos:

(a)  $\{2100, 4100, 8100, 6100, 2100, \dots\}$ ,

(b)  $\{3792, 3792, \dots\}$ ,

## Alguns geradores

### G1. Gerador de von Neumann (1949)

- 1  $x_0$ : número de quatro algarismos decimais (**semente**). Faça  $i = 0$ .
- 2 Calcular  $x_i^2$ . Se necessário, acrescentar zeros à esquerda para que  $x_i^2$  seja escrito como  $d_7d_6d_5d_4d_3d_2d_1d_0$ , em que  $d_j \in \{0, 1, \dots, 9\}$ , para  $j = 0, 1, \dots, 7$ .
- 3 Fazer  $x_{i+1} = d_5d_4d_3d_2$  (**meio do quadrado**).
- 4 Faça  $i = i + 1$  e retorne ao passo 2 até que  $i = n$ .
- 5 Divida os elementos da sequência por 10.000.

Exemplos:

(a)  $\{2100, 4100, 8100, 6100, 2100, \dots\}$ ,

(b)  $\{3792, 3792, \dots\}$ ,

(c) Considere  $x_0 =$  ano de seu nascimento.

## G2. Geradores congruenciais lineares (Lehmer, 1951)

## G2. Geradores congruenciais lineares (Lehmer, 1951)

Gerar uma sequência de inteiros  $x_1, x_2, \dots, x_n$  em  $\{0, 1, \dots, M-1\}$ ,  $M$  “grande”. Fazer  $u_i = x_i/M$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

$$x_i = (ax_{i-1} + c) \bmod M, \quad i \geq 1,$$

sendo que  $a, c, x_0 \in \{0, 1, \dots, M-1\}$ ,  $x_0$  é chamado de **semente** e  $\bmod$  representa o resto da divisão inteira.

## G2. Geradores congruenciais lineares (Lehmer, 1951)

Gerar uma sequência de inteiros  $x_1, x_2, \dots, x_n$  em  $\{0, 1, \dots, M-1\}$ ,  $M$  “grande”. Fazer  $u_i = x_i/M$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

$$x_i = (ax_{i-1} + c) \bmod M, \quad i \geq 1,$$

sendo que  $a, c, x_0 \in \{0, 1, \dots, M-1\}$ ,  $x_0$  é chamado de **semente** e *mod* representa o resto da divisão inteira.

Exemplos:

(a) Gerador do IMSL:  $a = 16807$ ,  $c = 0$ ,  $M = 2^{31} - 1$ , período =  $2^{31} - 2 = 2.147.483.646$ .

(b) IBM RANDU:  $a = 2^{16} + 3$ ,  $c = 0$ ,  $M = 2^{31}$ .

### G3. Outros geradores

### G3. Outros geradores

(1) Geradores com períodos  $2^{60}$ ,  $2^{113}$  e  $2^{19937} - 1 \cong 10^{6002}$  (Mersenne-Twister, *default* em R).

### G3. Outros geradores

(1) Geradores com períodos  $2^{60}$ ,  $2^{113}$  e  $2^{19937} - 1 \cong 10^{6002}$  (Mersenne-Twister, *default* em R).

(2) Gerador natural (Y. Dodge, 1996, *International Statistical Review* 64, 329–344): algarismos decimais de  $\pi$ .

Cálculo de  $\pi$  com  $12,1 \times 10^{12}$  dígitos decimais em dez/2013 (<http://mathworld.wolfram.com/PiDigits.html>).

Sugestão: Gravar bilhões de dígitos decimais de  $\pi$  e usar como gerador.



### G3. Outros geradores

(1) Geradores com períodos  $2^{60}$ ,  $2^{113}$  e  $2^{19937} - 1 \cong 10^{6002}$  (Mersenne-Twister, *default* em R).

(2) Gerador natural (Y. Dodge, 1996, *International Statistical Review* 64, 329–344): algarismos decimais de  $\pi$ .

Cálculo de  $\pi$  com  $12,1 \times 10^{12}$  dígitos decimais em dez/2013 (<http://mathworld.wolfram.com/PiDigits.html>).

Sugestão: Gravar bilhões de dígitos decimais de  $\pi$  e usar como gerador.

**Obs.** Há indicações de que “the decimal expansion of  $\pi$  is not statistically random” (R. E. Ganz, 2014, *Experimental Mathematics* 23, 99–104).

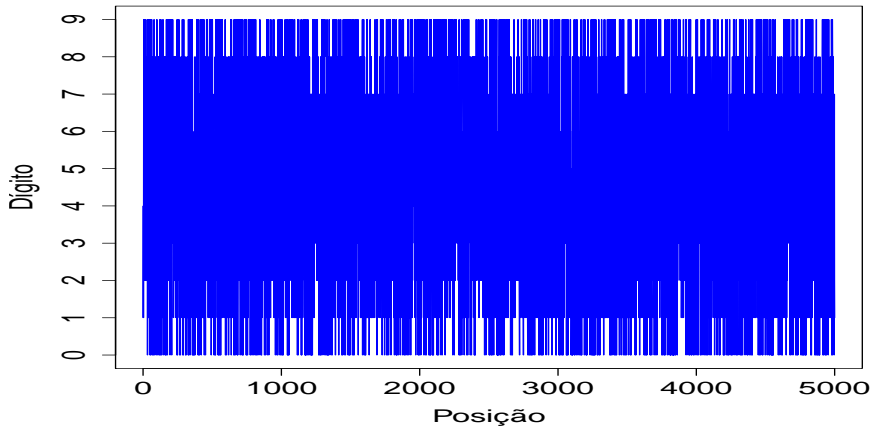


Figura 1: Sequência dos primeiros 5000 dígitos de  $\pi$ .

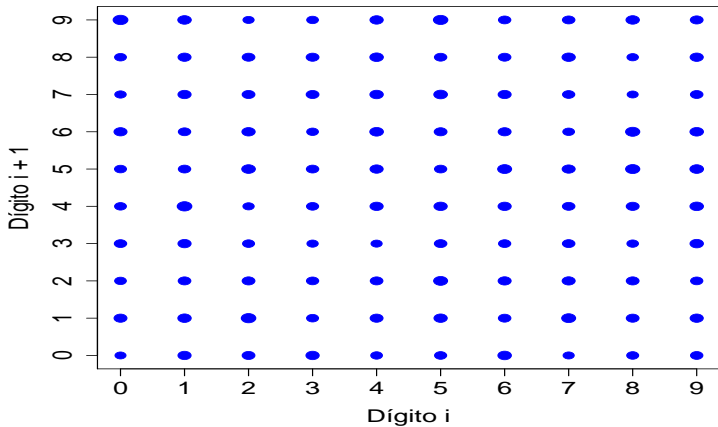


Figura 2: Distribuição dos primeiros 4999 pares (dígito  $i$ , dígito  $i + 1$ ) de  $\pi$ .