ICMC USP
SÃO CARLOS

6. NOÇÕES DE INFERÊNCIA ESTATÍSTICA

2014

Problemas de inferência

Inferir significa fazer afirmações sobre algo desconhecido.

A inferência estatística tem como objetivo fazer afirmações sobre uma característica de uma população a partir do conhecimento de dados de uma parte desta população (isto é, uma amostra de n observações).

A população é representada por uma distribuição de probabilidade com parâmetro(s) cujo(s) valor(es) é (são) desconhecido(s).

Fazemos inferências sobre o(s) parâmetro(s).

Problemas de inferência

Se θ é um parâmetro da distribuição de uma v. a. X e $X_1,...,X_n$ é uma amostra desta distribuição, encontramos três problemas típicos:

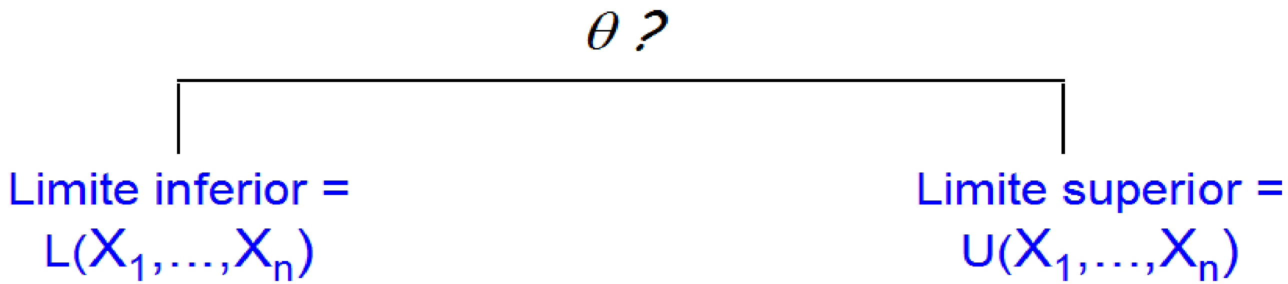
1. Estimação pontual

Apresentar um valor para θ, que é uma função da amostra $X_1,...,X_n$ ("cálculo" de θ), chamada de estimador de θ.

Espera-se que o estimador tenha boas propriedades: (i) em média esteja próximo de θ, (ii) o estimador se aproxima de θ quando n aumenta, ...

2. Estimação intervalar

Apresentar um intervalo de possíveis valores para θ, chamado de intervalo de confiança. Os limites do intervalo são funções da amostra $X_1,...,X_n$ (são aleatórios).



A probabilidade de que o intervalo contenha θ deve ser alta.

A amplitude do intervalo deve ser tão pequena quanto possível (intervalo mais preciso).

3. Teste de hipóteses

Uma hipótese estatística (H) é uma afirmação sobre o valor de θ. Pode ser verdadeira ou falsa.

Se θ é a probabilidade de sucesso no modelo binomial, H: $\theta = ½$, H: $\theta \neq ½$ e H: $\theta > ¾$ são exemplos de hipóteses.

Com base na amostra $X_1,...,X_n$, formulamos uma regra de decisão que permita concluir pela rejeição ou não rejeição (aceitação) de H. A decisão pode ser correta ou errada.

Estimação pontual – método de substituição

(a). Distribuição binomial. X ~ B(n, p). Vimos que E(X) = np.

$$\text{Um estimador para } p: \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{proporção amostral de sucessos.}$$

(b). Distribuição de Poisson. X ~ Po(μ). Vimos que E(X) = μ.

$$\text{Um estimador para } \mu : \overline{X}.$$

(c). Distribuição exponencial. X ~ Ex(λ). Vimos que E(X) = 1 / λ.

$$\text{Um estimador para } \lambda : = \frac{1}{\overline{X}}.$$

(d). Distribuição normal. X ~ N(μ, σ²). Vimos que E(X) = μ e Var(X) = σ².

$$\text{Um estimador para } \mu : \overline{X}. \qquad \text{Um estimador para } \sigma^2 : s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2.$$

(e). Distribuição log-normal. X ~ LN(μ, σ²) ⇔ Y = log(X) ~ N(μ, σ²).

$$\text{Um estimador para } \mu : \overline{Y}. \qquad \text{Um estimador para } \sigma^2 : s_Y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2.$$

Obs. Existem outros métodos de estimação.

Teste de hipóteses

Exemplo. Uma indústria adquire de um certo fabricante pinos cuja resistência média à ruptura é especificada em 60 unid. (valor nominal da especificação). Em um determinado dia a indústria recebeu um grande lote de pinos e a equipe técnica da indústria deseja verificar se o lote atende às especificações.

H_0: O lote atende às especificações (Hipótese nula).

H_1: O lote não atende às especificações (Hipótese alternativa).

A v. a. X (resistência à ruptura) é tal que $X \sim N(\mu, 25)$. O problema pode ser resolvido testando as hipóteses

$H_0: \mu = 60$ (hipótese simples: um único valor)

e $H_1: \mu \neq 60$ (hipótese composta: mais de um valor)

Teste de hipóteses

Uma hipótese estatística é uma afirmação sobre o(s) parâmetro(s) da distribuição de probabilidade de uma característica (v. a. X) da população.

Um teste de uma hipótese estatística é um procedimento ou regra de decisão que nos possibilita decidir por H_0 ou H_1 com base na amostra $X_1,\ldots,X_n$.

Exemplo. A equipe técnica da indústria decidiu retirar uma amostra aleatória de tamanho n = 16 do lote recebido. A resistência de cada pino foi medida e foi calculada a resistência média $\bar{X}$ (estimador de μ), que será utilizada para realizar o teste (estatística de teste). Podemos afirmar que

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{25}{16}\right).$$

Obs. Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é uma amostra de uma distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, então a média amostral tem distribuição $N(\mu, \sigma^2/n)$.

Para quais valores de $\bar{X}$ a equipe técnica deve rejeitar H_0 e portanto rejeitar o lote?

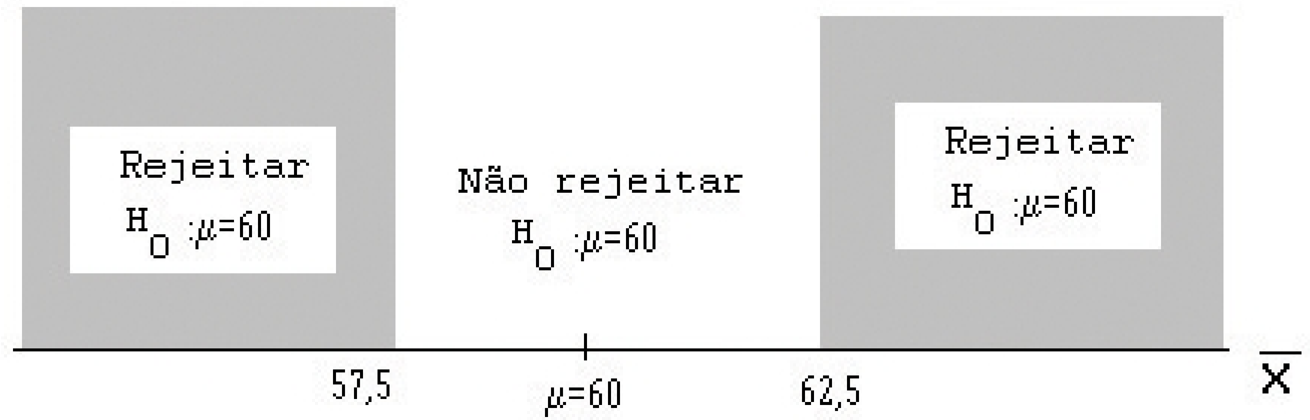
Região crítica (R_c) ou região de rejeição é o conjunto de valores assumidos pela estatística de teste para os quais a hipótese nula é rejeitada. Seu complementar é a região de aceitação (R_a).

Exemplo. Se o lote está fora de especificação, isto é, se H_1: $\mu \neq 60$ for verdadeira, espera-se que a média amostral seja inferior ou superior a 60 unid.

A equipe técnica decidiu adotar a seguinte regra:
rejeitar H_0 se $\bar{X}$ for maior do que 62,5 unid. ou menor do que 57,5 unid.
As duas regiões são

$R_c = \{\bar{X} > 62{,}5 \text{ ou } \bar{X} < 57{,}5\}$: região de rejeição de H_0 e

$R_a = \{57{,}5 \leq \bar{X} \leq 62{,}5\}$: região de aceitação de H_0.



Procedimento (teste):

$$\text{Se } \bar{x} \in R_c, \text{ rejeita-se } H_0;$$

$$\text{Se } \bar{x} \notin R_c, \text{ não se rejeita (aceita-se) } H_0.$$

Tipos de erros

Erro tipo I: rejeitar H_0 quando H_0 é verdadeira.

Erro tipo II: não rejeitar (aceitar) H_0 quando H_0 é falsa.

Exemplo. As hipóteses são

H_0: O lote atende às especificações;

H_1: O lote não atende às especificações.

Erro tipo I: rejeitar o lote sendo que ele está de acordo com as especificações.

Erro tipo II: não rejeitar (aceitar) o lote sendo que ele não está de acordo com as especificações.

Quadro resumo:

Decisão	Situação real e desconhecida	
	Ho verdadeira	Ho falsa
Não rejeitar Ho	Decisão correta	**Erro tipo II**
Rejeitar Ho	**Erro tipo I**	Decisão correta

Nível de significância e poder

P(Erro tipo I) = α (nível de significância).

$$\alpha = P(\text{Rejeitar } H_0; H_0 \text{ verdadeira}).$$

$$P(\text{Erro tipo II}) = \beta = P(\text{Não rejeitar } H_0; H_0 \text{ falsa})$$

$$= P(\text{Não rejeitar } H_0; H_1 \text{ verdadeira}).$$

$1 - \beta = P(\text{Rejeitar } H_0; H_0 \text{ é falsa})$: poder do teste.

Obs. Quanto maior o poder, melhor o teste.

Exemplo. As hipóteses são H_0: $\mu = 60$ e H_1: $\mu \neq 60$. Logo,

$$\alpha = P(\overline{X} > 62{,}5 \text{ ou } \overline{X} < 57{,}5;\ \mathrm{H}_0 : \mu = 60).$$

Se H_0 for verdadeira, então $\overline{X} \sim N(60, 25/16)$.

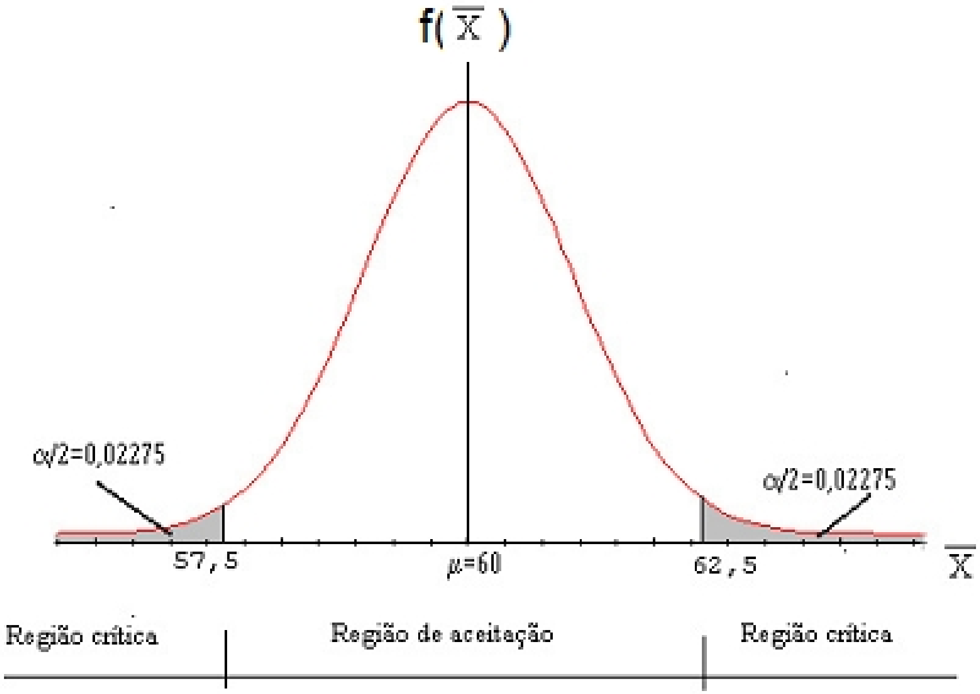
Calculamos o nível de significância:

$$\alpha = \mathrm{P}(\overline{X} > 62{,}5;\mathrm{H}_0 : \mu = 60) + \mathrm{P}(\overline{X} < 57{,}5;\mathrm{H}_0 : \mu = 60)$$

$$= \mathrm{P}\left(\frac{\overline{X} - 60}{\sqrt{25/16}} > \frac{62{,}5 - 60}{\sqrt{25/16}}\right) + \mathrm{P}\left(\frac{\overline{X} - 60}{\sqrt{25/16}} < \frac{57{,}5 - 60}{\sqrt{25/16}}\right)$$

$$= \mathrm{P}(Z > 2{,}00) + \mathrm{P}(Z < -2{,}00) = 0{,}02275 + 0{,}02275 = 0{,}0455.$$

Cálculo de α:



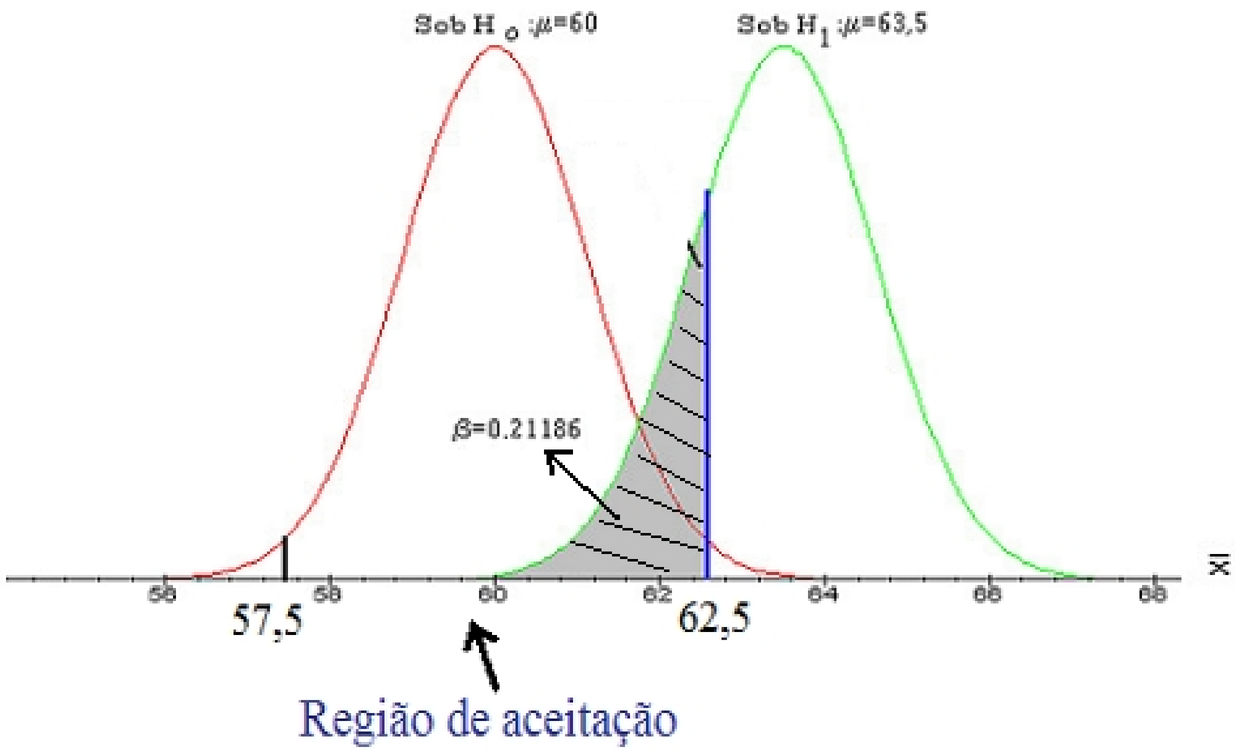
f($\overline{X}$)
α/2=0,02275
α/2=0,02275
57,5
μ=60
62,5
$\overline{X}$
Região crítica
Região de aceitação
Região crítica

Cálculo de β:

$$\beta = \text{P(Não rejeitar } H_0; H_1 \text{ verdadeira)} = P(57{,}5 \le \overline{X} \le 62{,}5; H_1 : \mu \ne 60).$$

Como exemplo de cálculo de β, selecionamos H_1: μ = 63,5. Logo,

$\overline{X} \sim N\left(63{,}5; \frac{25}{16}\right)$ e $\beta = P(57{,}5 \le \overline{X} \le 62{,}5; H_1 : \mu = 63{,}5).$



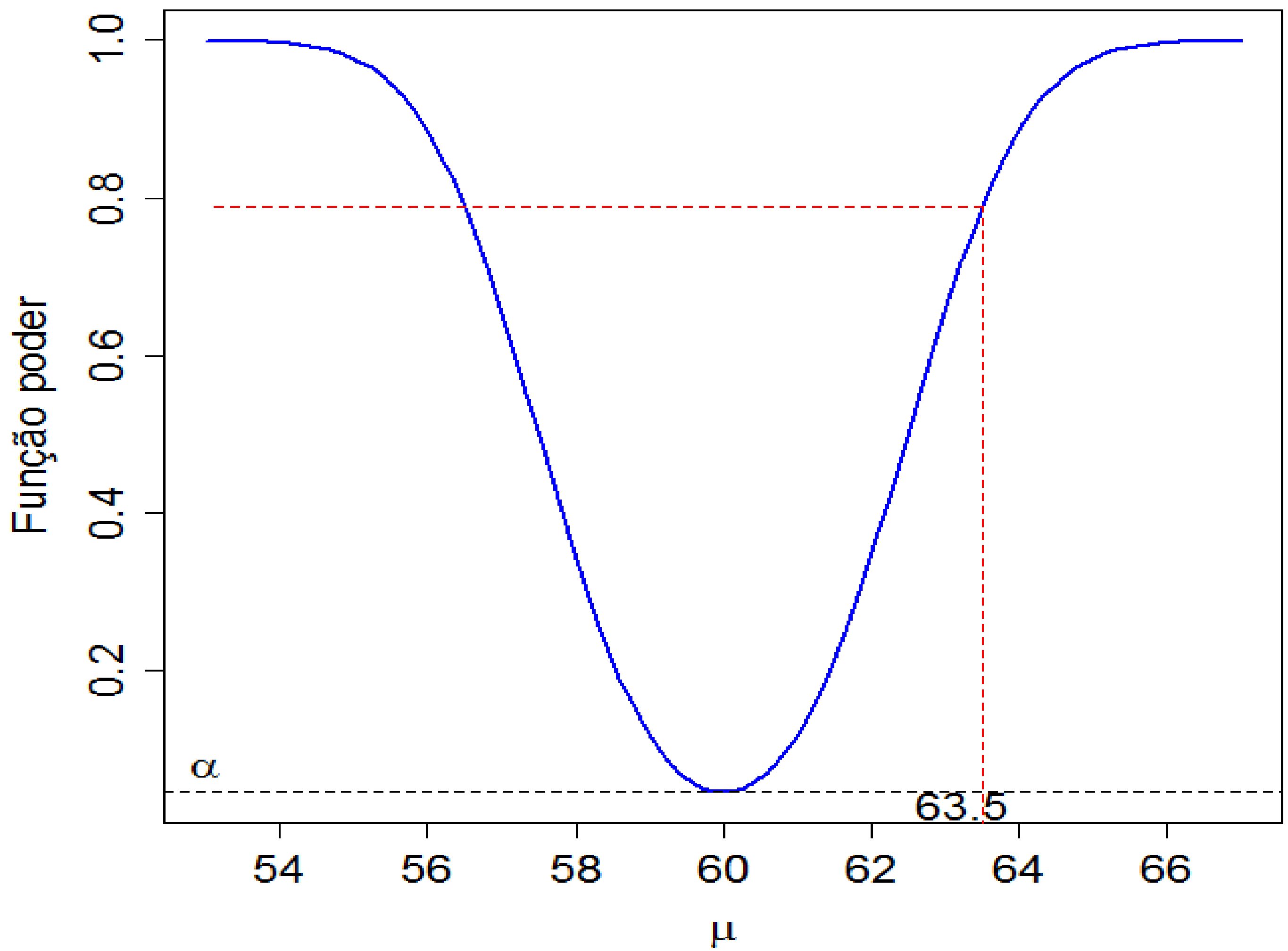
Cálculo de β:

Efetuando o cálculo obtemos

$$\begin{aligned}
\beta &= P(57{,}5 \le \overline{X} \le 62{,}5;\, H_1 : \mu = 63{,}5) \\
&= P(\overline{X} \le 62{,}5;\, \mu = 63{,}5) - P(\overline{X} \le 57{,}5;\, \mu = 63{,}5) \\
&= P(Z \le -0{,}80) - P(Z \le -4{,}80) \\
&= 0{,}2119 - 0{,}0000 \\
&= 0{,}2119.
\end{aligned}$$

Logo, se $\mu = 63{,}5$, o poder do teste é igual a 1 – 0,2119 = 0,7881.

Função poder



Hipóteses bilateral e unilaterais

Se as hipóteses nula e alternativa são

$$H_0: \mu = \mu_0;$$
$$H_1: \mu \neq \mu_0,$$

em que μ_0 é uma constante conhecida (valor de teste), o teste é chamado de bilateral.

Podemos ter também as hipóteses

$$H_0: \mu = \mu_0;$$
$$H_1: \mu < \mu_0,$$ unilateral à esquerda

ou $$H_0: \mu = \mu_0;$$
$$H_1: \mu > \mu_0.$$ unilateral à direita

Sugestão. Expressar H_0 em forma de igualdade.

Exemplo

Um fabricante de um certo componente afirma que o tempo médio de vida dos componentes produzidos é de 1000 horas. Engenheiros de produto têm interesse em verificar se uma modificação do processo de fabricação aumenta a duração dos componentes.

Hipóteses:

$$H_0 : \mu = 1000 \text{ horas;}$$

$$H_1 : \mu > 1000 \text{ horas,}$$

sendo μ o tempo médio de duração dos componentes.

Procedimento básico de testes de hipóteses

O procedimento de teste de hipóteses relativo ao parâmetro θ de uma população é decomposto em quatro passos:

(i) Formulação das hipóteses:

$$H_0 : \theta = \theta_0;$$
$$H_1 : \theta < \theta_0 \text{ ou } \theta > \theta_0 \text{ ou } \theta \neq \theta_0.$$

(ii) Identificação da estatística de teste e caracterização da sua distribuição (por exemplo, método de substituição, lâmina 6).

(iii) Escolha do nível de significância do teste (α = 5%, 1% e 0,5% são comuns) e obtenção da região crítica.

(iv) Cálculo da estatística de teste e tomada de decisão (H_0 deve ser rejeitada ou não?).

Teste de hipóteses para uma média populacional

Considere uma amostra aleatória de tamanho n de uma população normal com média μ (desconhecida) e variância σ^2 (conhecida). Iniciamos pelo teste unilateral à esquerda:

(i)

$H_0 : \mu = \mu_0;$

$H_1 : \mu < \mu_0.$

(ii) A estatística de teste é a média amostral $\bar{X}$ (estimador pontual de μ). Se a distribuição da população é normal ou se amostra é grande ($n \geq 30$, mesmo que a distribuição da população não seja normal) a distribuição de $\bar{X}$ é $N(\mu, \sigma^2 / n)$, aproximadamente. Se H_0 for verdadeira, então

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} \sim N(0,1).$$

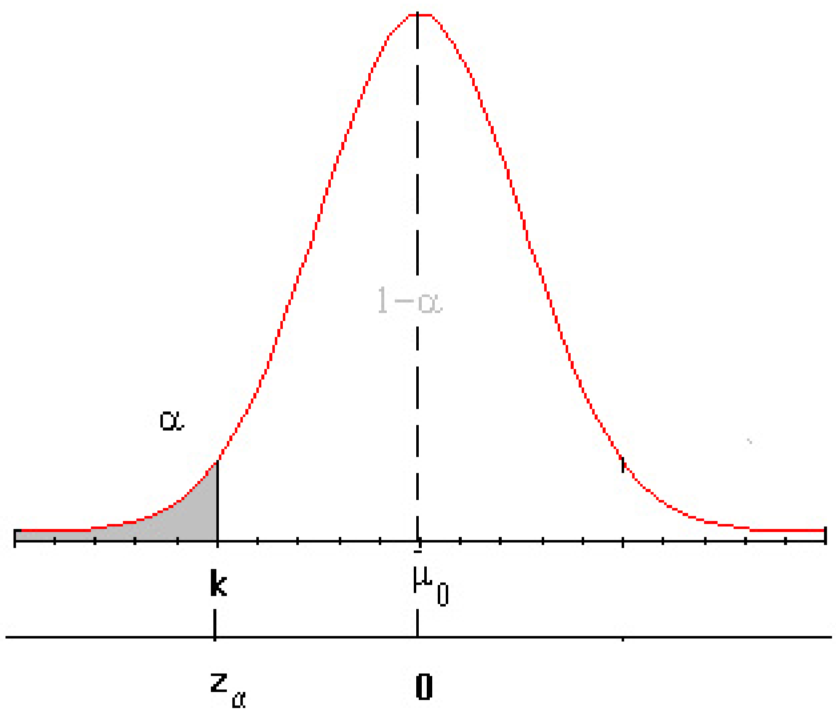
Teste de hipóteses para uma média populacional

(iii) Rejeitamos H_0 em favor de H_1 se a média amostral $\bar{X}$ é "pequena" em relação μ_0. A região crítica é obtida selecionando um k tal que $R_c = \{ \bar{X} < k \}$, sendo que $P(\bar{X} < k; H_0 : \mu = \mu_0) = \alpha$. Ou seja, sob H_0

$$P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} < \frac{k - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right) = P\left(Z < \frac{k - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right) = \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{k - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = z_\alpha \Rightarrow k = \mu_0 + z_\alpha \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow R_c = \left\{ \bar{X} < \mu_0 + z_\alpha \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}.$$



Obs. $z_\alpha < 0$.

(iv) Conclusão: se $\bar{x} \in R_c = \left\{ \bar{X} < \mu_0 + z_\alpha \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$, rejeita-se H_0 ; caso contrário não se rejeita H_0.

Exemplo

Um comprador de tijolos suspeita de uma diminuição na resistência. De experiências anteriores, sabe-se que a resistência média ao desmoronamento de tais tijolos é igual a 200 kg, com um desvio padrão de 10 kg. Uma amostra de 100 tijolos, escolhidos ao acaso, forneceu uma média de 195 kg. A um nível de significância de 5%, pode-se afirmar que a resistência média ao desmoronamento diminuiu?

(i) As hipóteses de interesse são

$$H_0 : \mu = 200\,\text{kg};$$

$$H_1 : \mu < 200\,\text{kg}.$$

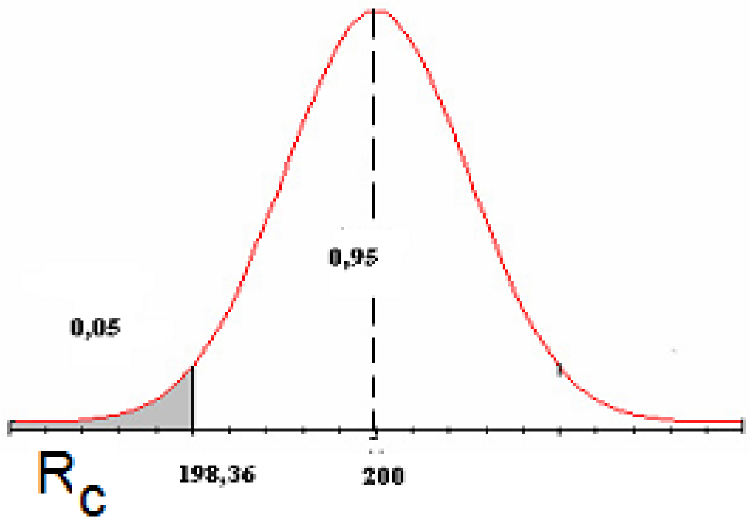
(ii) A estatística de teste é a média amostral $\bar{X}$. Já que n = 100 $\geq$ 30, tem-se que sob H_0, $\bar{X} \sim N\left(200, \dfrac{100}{100}\right)$, aproximadamente.

(iii) A região crítica pode ser obtida selecionando k de maneira que R_c = { $\bar{X}$ < k }, sendo que $P(\bar{X} < k; H_0 : \mu = \mu_0) = \alpha$ = 0,05. Ou seja, sob H_0,

Exemplo

$$P\left(\frac{\overline{X}-200}{10/\sqrt{100}} \leq \frac{k-200}{10/\sqrt{100}}\right) = P\left(Z < \frac{k-200}{1}\right) = \alpha = 0{,}05 \Rightarrow k-200 = -1{,}64 \Rightarrow k = 198{,}36$$

$$\Rightarrow R_c = \{\overline{X} < 198{,}36\}.$$



(iv) Do enunciado a média amostral vale 195. Logo, $\bar{x} = 195 \in R_c = \{\overline{X} < 198{,}36\}$. Rejeita-se H_0 a um nível de 5% de significância.

Conclusão. De acordo com os dados coletados e adotando um nível de significância de 5%, concluímos que resistência média ao desmoronamento diminuiu.

Método alternativo

Um método alternativo prático: trabalhar diretamente na escala Z.

(i) $H_0 : \mu = \mu_0$ contra $H_1 : \mu < \mu_0$.

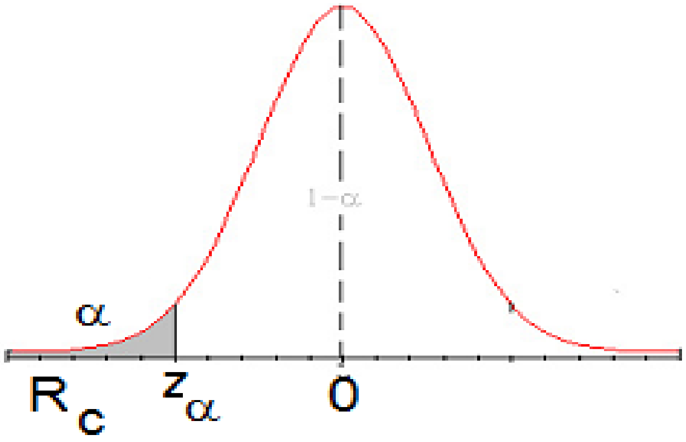
(ii) Estatística de teste:

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} N(0,1), \text{ pelo menos aproximadamente.}$$

(iii) Região crítica para um nível de significância α escolhido:

$$R_c = \{Z < z_\alpha\}.$$

(iv) Se $z \in R_c = \{Z < z_\alpha\}$, rejeita-se H_0; caso contrário, não se rejeita H_0.



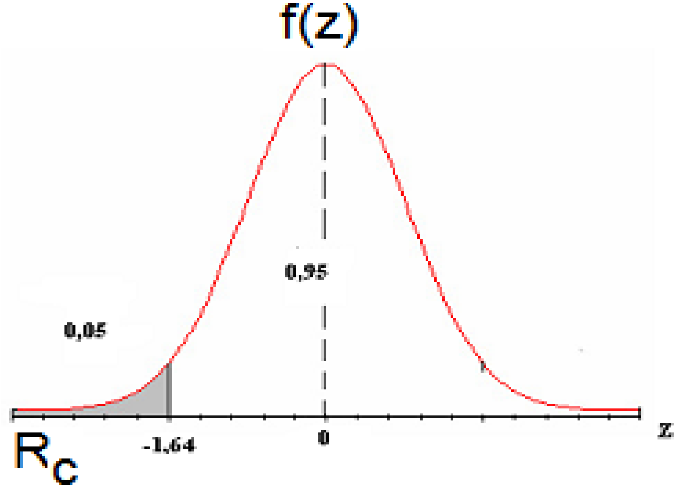
Exemplo

(i) $H_0 : \mu = 200$ contra $H_1 : \mu < 200$.

(ii) Estatística de teste: $$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - 200)}{\sigma} \underset{sob\ H_0}{\sim} N(0,1).$$

(iii) Região crítica para um nível de significância α = 0,05:

$$R_c = \{z < -1{,}64\}.$$



(iv) Calculamos $z = \frac{\sqrt{100}(195 - 200)}{10} = -5 \in R_c$. Rejeita-se H_0 a um nível de significância de 5%.

Procedimento geral

Hipóteses: (i)

$$\begin{array}{lll} H_0 : \mu = \mu_0 & H_0 : \mu = \mu_0 & H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 & H_0 : \mu > \mu_0 & H_0 : \mu \neq \mu_0 \\ \text{À esquerda} & \text{À direita} & \text{Bilateral} \end{array}$$

(ii) Estatística de teste:

(a) Variância da população é conhecida:

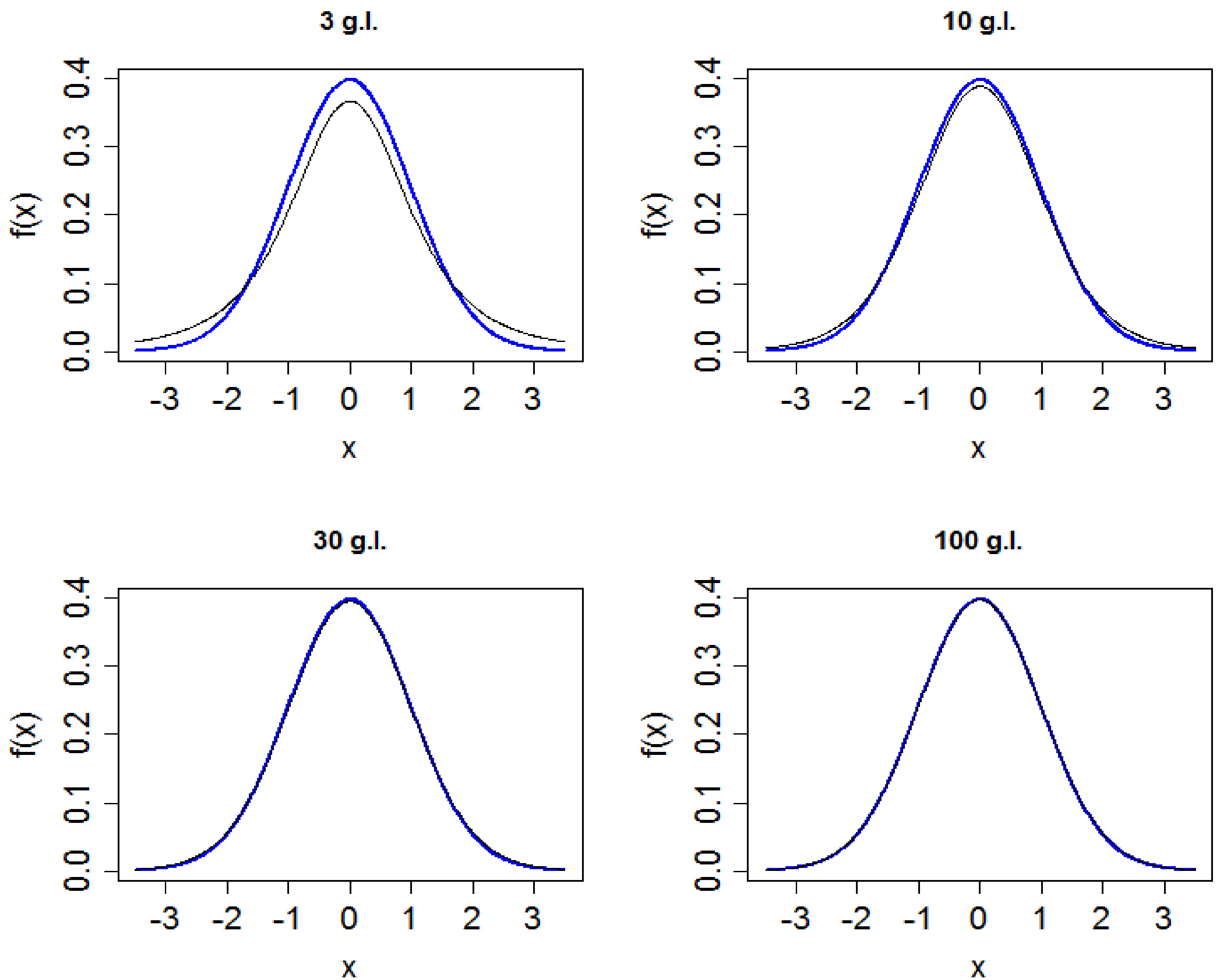
$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} \underset{sob\ H_0}{\sim} N(0,1).$$

(b) Variância da população é desconhecida (s é o desvio padrão amostral):

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{s} \underset{sob\ H_0}{\sim} t(n-1).$$

Distribuição t de Student com n – 1 graus de liberdade (g.l.).

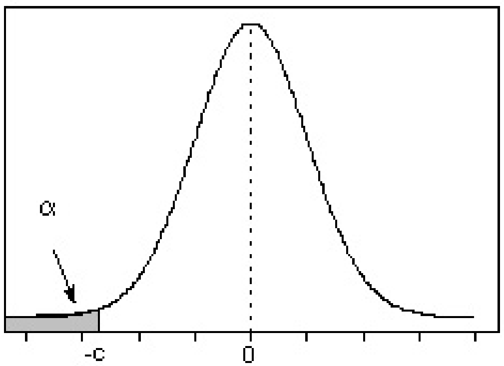
Distribuições normal e t de Student



Procedimento geral

(iii) Região crítica para um nível de significância α escolhido:

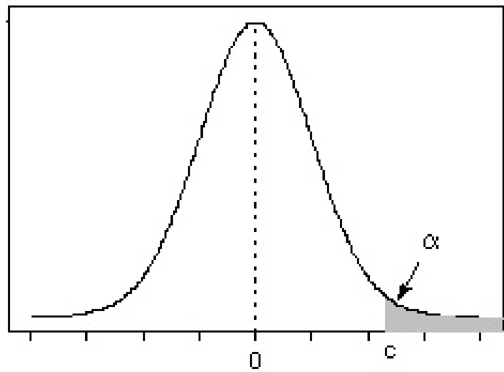
H$_1$: $\mu < \mu_0$



$$R_c^{(Z)} = \{Z < -c\}$$

$$R_c^{(T)} = \{T < -c\}$$

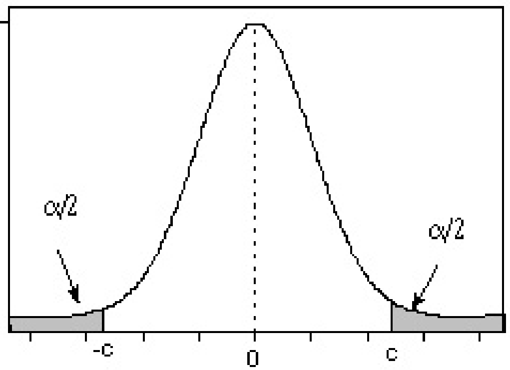
H$_1$: $\mu > \mu_0$



$$R_c^{(Z)} = \{Z > c\}$$

$$R_c^{(T)} = \{T > c\}$$

H$_1$: $\mu \neq \mu_0$



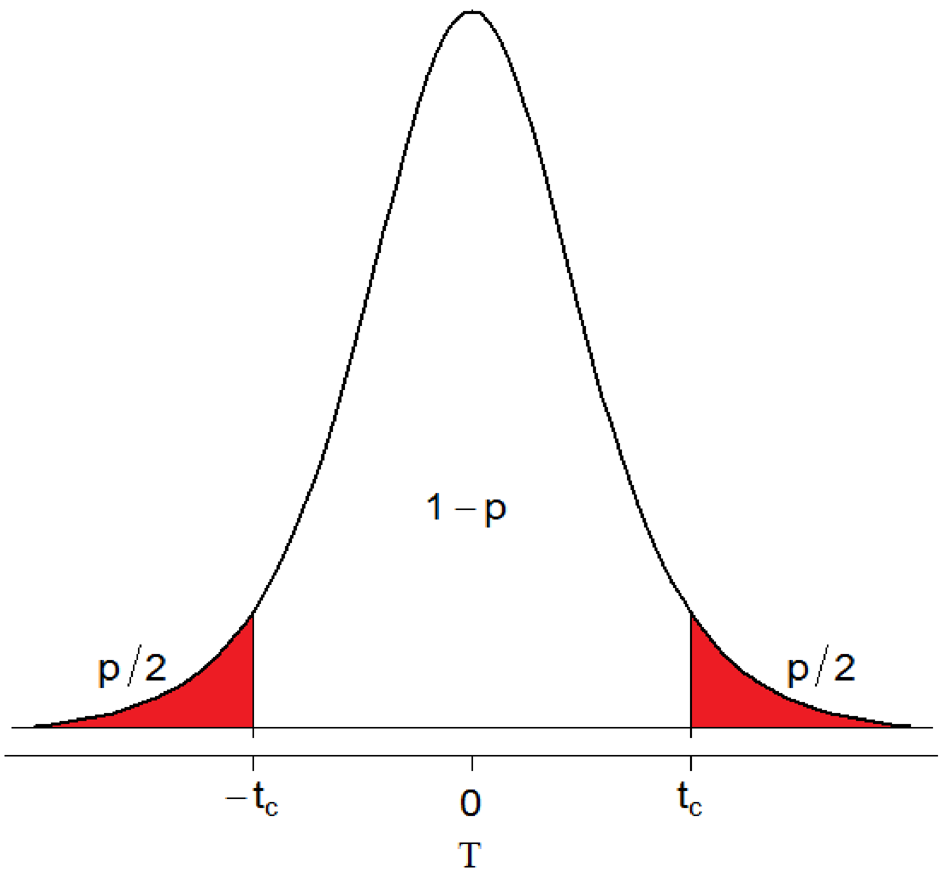
$$R_c^{(Z)} = \{|Z| > c\}$$

$$R_c^{(T)} = \{|T| > c\}$$

(iv) Se $Z \in R_C$ ou $T \in R_C$, rejeita-se H_o; caso contrário, não se rejeita H_0.

Obs. Nas regiões críticas com Z e T o valor de c não é o mesmo.

Tabela da distribuição t de Student

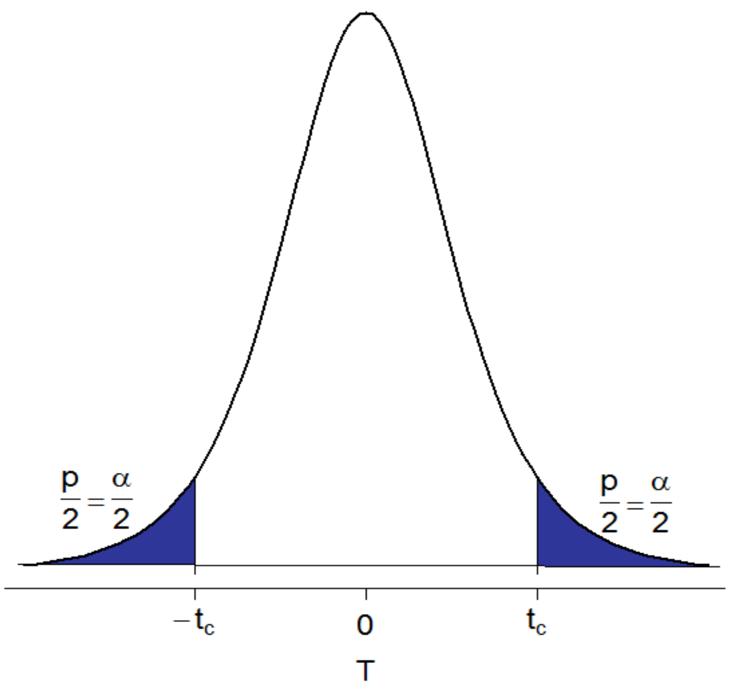


A tabela (Tábua III) contém os valores de t_c ($t_c > 0$) tais que

$P(-t_c \leq T \leq t_c) = 1 - p$ correspondentes a alguns valores de p e para alguns graus de liberdade.

Tabela da distribuição t de Student

Exemplo. Se n = 12, são 11 graus de liberdade. Se tivermos H_1: $\mu \neq \mu_0$, escolhendo α = 5%, temos p/2 = α/2, ou seja, p = 5%.



Consultando a tábua III encontramos t_c = 2,201 e R_c = {|T| > 2,201}.

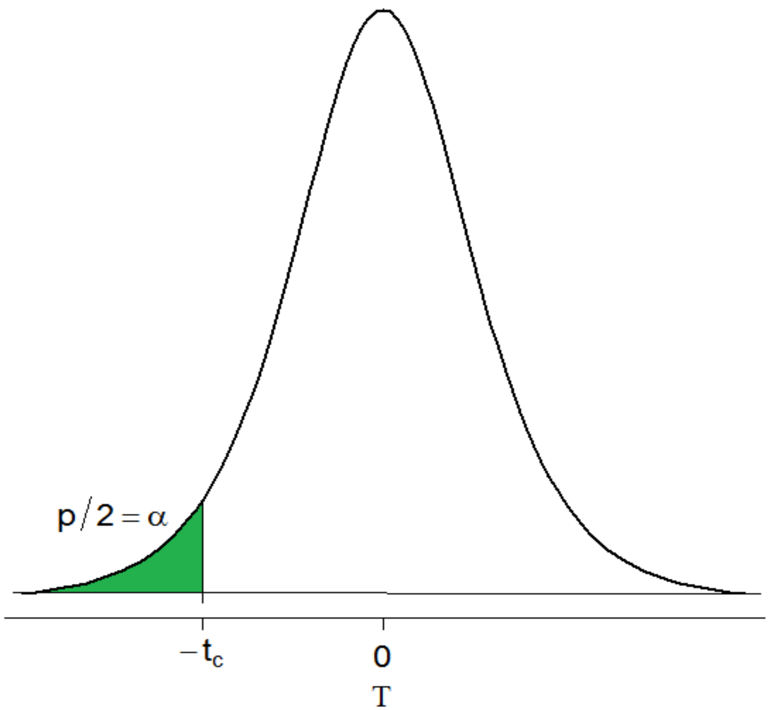
Graus de liberdade							
		p = 90%	80%	...	5%	...	0,10%
1							
2							
...							
11					2,201		
...							
120							
Infinito					1,960		
		p = 90%	80%	...	5%	...	0,10%

Obs.. À medida que aumentam os graus de liberdade, a distribuição t se aproxima da normal (neste exemplo, $t_c \rightarrow 1{,}960 = z_c$).

Tabela da distribuição t de Student

Exemplo. Se n = 28, são 27 graus de liberdade. Se tivermos H_1: $\mu < \mu_0$, escolhendo α = 1%, temos $p/2 = \alpha$, ou seja, $p = 2\alpha = 2\%$.

Consultando a tábua III encontramos $t_c = 2{,}473$ e $R_c = \{T < -2{,}473\}$.



Graus de liberdade							
		p = 90%	80%	...	2%	...	0,10%
1							
2							
...							
27					2,473		
...							
120							
Infinito					2,326		
		p = 90%	80%	...	2%	...	0,10%

Obs. Neste exemplo, se tivéssemos H_1: $\mu > \mu_0$, a região crítica seria $R_c = \{T > 2{,}473\}$.

Exemplo

Dados históricos coletados em uma linha de produção de um certo item indicam 115 kg como massa média. A fim de testar a hipótese de que a média de itens recentemente produzidos se manteve, retirou-se, ao acaso, uma amostra de 20 itens, obtendo-se média igual a 118 kg e desvio padrão 20 kg. Utilize α = 0,05.

(i) As hipóteses de interesse são

$$H_0 : \mu = 115\,\text{kg};$$

$$H_1 : \mu \neq 115\,\text{kg}.$$

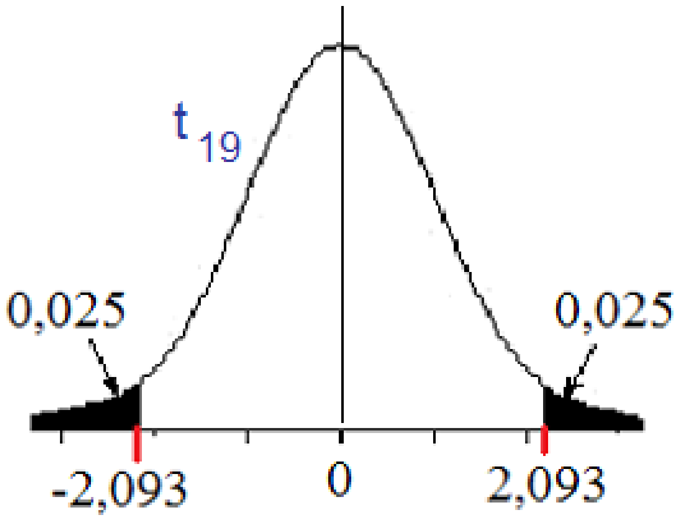
Aproximamos a distribuição da média dos 20 itens por uma distribuição normal com média μ e variância σ^2 / n.

(ii) Estatística de teste:

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - 115)}{S} \underset{sob\ H_0}{\sim} t(n-1).$$

Exemplo

(iii) Região crítica para um nível de significância α = 0,05 e com n – 1 = 19 g.l.:



$$R_c = \{|T| > 2{,}093\}.$$

(iv) Calculamos $T = \frac{\sqrt{20}(118 - 115)}{20} = 0{,}67 \notin R_c$. Não se rejeita H_0 a um nível de de significância de 5%. A diferença não é significativa.

Conclusão. De acordo com os dados coletados, a um nível de significância de 5% concluímos que a massa média dos itens produzidos se manteve.

Teste de hipóteses para uma proporção populacional

O procedimento para testes de hipóteses sobre a proporção populacional (p) semelhante ao utilizado para testes sobre uma média populacional.

Problema. Testar a hipótese que a proporção de sucessos de um ensaio de Bernoulli é igual a um valor especificado p_0. Isto é, testar um dos seguintes pares de hipóteses:

(i)

$\mathrm{H}_0 : p = p_0$	$\mathrm{H}_0 : p = p_0$	$\mathrm{H}_0 : p = p_0$
$\mathrm{H}_1 : p < p_0$	$\mathrm{H}_0 : p > p_0$	$\mathrm{H}_0 : p \neq p_0$
À esquerda	À direita	Bilateral

Teste de hipóteses para uma proporção populacional

(ii) Estatística de teste:

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\overline{p} - p_0)}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}} \underset{sob\ H_0}{\sim} N(0,1), \quad \text{aproximadamente,}$$

sendo que

$$\overline{p} = \frac{\text{Número de sucessos}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$:estimador pontual de p.

é a proporção amostral de sucessos e $X_i = 1$, se o resultado for sucesso; $X_i = 0$, se o resultado for insucesso.

Exemplo

Um estudo é realizado para determinar a presença de pequenas anomalias em chapas metálicas de uma certa dimensão. Segundo o fabricante, a proporção de chapas com anomalias é inferior a 25%. Foram inspecionadas 50 chapas escolhidas ao acaso e sete delas apresentaram algum tipo de anomalia. Estes dados justificam a afirmação do fabricante? Adote um nível de significância igual a 0,05.

(i) Hipóteses:

$\mathrm{H}_0 : p = 0{,}25;$

$\mathrm{H}_1 : p < 0{,}25.$

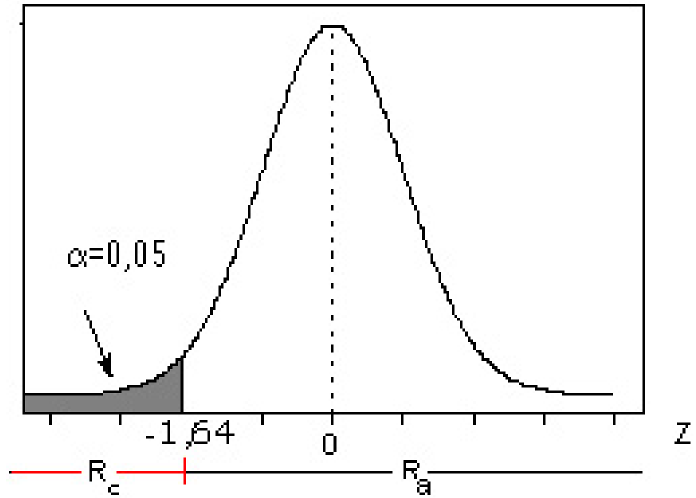
(ii) Estatística de teste:

$$Z = \frac{\sqrt{50}(\overline{p} - 0{,}25)}{\sqrt{0{,}25(1 - 0{,}25)}} \underset{sob\ H_0}{\sim} N(0{,}1), \text{ aproximadamente.}$$

Exemplo

(iii) Região crítica para um nível de significância $\alpha = 0,05$:

$$R_c = \{z < -1,64\}.$$



(iv) Temos n = 50. Calculamos $\bar{p} = \dfrac{7}{50} = 0,14$ e $z = \dfrac{\sqrt{50}(0,14 - 0,25)}{\sqrt{025 \times (1 - 0,25)}} = -1,796 \in R_c$.

Rejeita-se H_0 ao nível de 5% de significância.

Conclusão. Adotando um nível de significância de 5% concluímos a partir dos dados que a proporção de chapas produzidas com anomalias é inferior a 25%.