1ª prova – 2º/2012

1. Um experimento foi realizado com o objetivo de avaliar o efeito da intoxicação por álcool sobre a coordenação. Nove pessoas receberam uma certa quantidade de álcool e em seguida escreveram uma certa frase tantas vezes quanto foram capazes em um intervalo de um minuto. O número de palavras corretas foi contado e transformado em um escore de modo que o valor 0 representa o resultado de uma pessoa sem influência de álcool. Valores positivos e negativos representam acréscimo e decréscimo, respectivamente, em relação ao resultado de uma pessoa em condições normais. Os escores foram 10, -8, -6, -2, 15, 0, -7, 5, -8. (a) Apresente uma estimativa para o escore mediano. (b) Apresente um intervalo de confiança com coeficiente próximo a 95% para o escore mediano. (c) Apresente a probabilidade de cobertura do intervalo de confiança do item (b). (d) Pode ser afirmado que há efeito da intoxicação por álcool sobre a coordenação das pessoas?
   Solução. Os escores x em ordem crescente são

   -8, -8, -7, -6, -2, 0, 5, 10 e 15.

   (a) A mediana amostral é um estimador do escore mediano. Como $n = 9$, $X_{(5)}$ corresponde à mediana amostral. A estimativa é $x_{(5)} = -2$.
   (b) Um intervalo de confiança (IC) para o escore mediano pode ser obtido com base na estatística de teste do sinal. Para um coeficiente de confiança de $1-\alpha = 0,95$, inicialmente calculamos o quantil superior $1-\alpha/2 = 0,975$ da distribuição binomial($n = 9, 1/2$), denotado por $b_{1-\alpha/2}$. Consultando a linha da função distribuição acumulada na Tabela N2, obtemos $b_{1-\alpha/2} = 7$. A posição do limite superior do IC é dada por $o_S = 7+1 = 8$. A posição do limite inferior do IC é dada por $o_I = n+1-o_S = 9+1-8 = 2$. O intervalo de confiança é dado por $\left(X_{(o_I)}, X_{(o_S)}\right)$. Com base nos dados calculamos $\left(x_{(2)}, x_{(8)}\right) = (-8, 10)$.
   (c) Utilizamos a Tabela N2. A probabilidade de cobertura do intervalo é

$$\sum_{j=o_I}^{o_S-1} \mathrm{P}(X = j) = \sum_{j=2}^{7} \mathrm{P}(X = j)$$
$$= 0,070 + 0,164 + 0,246 + 0,246 + 0,164 + 0,070 = 0,960,$$

   que também pode ser calculada com a função distribuição acumulada (como?).
   Quais as probabilidades de cobertura dos intervalos $(X_{(2)}, X_{(7)})$ e $(X_{(3)}, X_{(8)})$?
   (d) Com base no intervalo de confiança de 96% do item (c), que inclui o valor 0, não pode ser afirmado que há efeito da intoxicação por álcool sobre a coordenação das pessoas.

2. Nove laboratórios participaram de um estudo com o objetivo de verificar se a dose efetiva mediana de uma certa droga ultrapassa 0,5. Os dados coletados foram

   0,41, 0,52, 0,91, 0,45, 1,06, 0,82, 0,78, 0,68 e 0,75.

   (a) Apresente um teste com nível de siginificância nominal de 5%. O teste é conservador ou liberal? (b) Apresente uma solução com base no valor-p do teste.
   Solução. A um nível de significância nominal $\alpha = 0,05$, deve ser tetada $\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0$ contra $\mathrm{H}_1 : \theta > \theta_0$, em que θ denota a dose efetiva mediana e $\theta_0 = 0,5$. Não há empates e nenhuma observação é igual ao valor de teste (θ_0).
   (a) A solução está baseada no teste do sinal. Inicialmente calculamos o quantil $1 - \alpha =$

0, 95 da distribuição binomial($n = 9, 1/2$), denotado por $b_{1-\alpha}$. Consultando a linha da função distribuição acumulada na Tabela N2, obtemos $b_{1-\alpha} = 7$. Consultando a Tabela N2, o nível de significância do teste é $0,070 + 0,018 + 0,002 = 0,080$, que é maior do que 0,05, de forma que o teste é liberal. A estatística de teste é $B = \sum_{i=1}^{n} I(Z_i > 0)$, em que $Z_i = X_i - \theta_0$. Rejeitamos H_0 se $B_{\text{obs}} \geq b_{1-\alpha} = 7$; caso contrário, não rejeitamos. Aplicando a transformação $z_i = x_i - \theta_0$ obtemos

-0,09, 0,02, 0,41, -0,05, 0,56, 0,32, 0,28 0,18 e 0,25,

de modo que $B_{\text{obs}} = 7$ e a decisão é rejeitar H_0. A um nível de significância de 8%, conclui-se que a dose efetiva mediana ultrapassa 0,5.

(c) Como $B_{\text{obs}} = 7$, valor-$p = \sum_{j=7}^{9} \text{P}(B \geq j)$, sendo que $B \sim$ binomial$(9, 1/2)$. Consultando a Tabela N2 ou aproveitando um cálculo no item (b), obtemos valor-p = 0,080. A um nível de significância de 5%, conclui-se que a dose efetiva mediana não ultrapassa 0,5.

3. Verifique se as observações

0,65, 0,30, 0,57, 11,36, 4,04, 1,30, 6,68 e 4,27

foram obtidas de uma população com função distribuição acumulada $F(x) = 1 - \exp(-x/2)$, se $x \geq 0$ e $F(x) = 0$, se $x < 0$. O que você pode afirmar sobre o valor-p do teste realizado?

Solução. Deve ser testada $H_0 : F(x) = F_0(x)$ contra $H_1 : F(x) \neq F_0(x)$, em que $F_0(x) = 1 - \exp(-x/2)$, se $x \geq 0$ e $F_0(x) = 0$, se $x < 0$. Adotamos um nível de significância de 5%. Como a hipótese nula é simples, o teste será realizado com a estatística de Kolmogorov-Smirnov. As $n = 8$ observações em ordem crescente são

0,30, 0,57, 0,65, 1,30, 4,04, 4,27, 6,68 e 11,36.

Não há empates. A função distribuição empírica $S_n(x)$ tem incremento igual a $1/n = 1/8$ em cada um dos valores observados. Os elementos necessários ao cálculo da estatística de teste D_n estão apresentados na Tabela N1.

Tabela N1: Cálculo da estatística D_n na questão 3.

x	$S_n(x)$	$F_0(x)$	$\mid S_n(x) - F_0(x) \mid$	$\mid S_n(x-\varepsilon) - F_0(x) \mid$
0,30	0,125	0,139	0,014	0,139
0,57	0,250	0,248	0,002	0,123
0,65	0,375	0,277	0,098	0,027
1,30	0,500	0,478	0,022	0,103
4,04	0,625	0,867	0,242	$\boxed{0,367}$
4,27	0,750	0,882	0,132	0,257
6,68	0,875	0,965	0,090	0,215
11,36	1,000	0,997	0,003	0,122

A estatística D_n é calculada como o valor máximo dos elementos das duas últimas colunas da Tabela N1, resultando em $D_{n,\text{obs}} = 0,367$. Consultando a Tabela N3 obtemos $D_{n,1-\alpha} = 0,454$. Como $D_{n,\text{obs}} < D_{n,1-\alpha}$, não rejeitamos a hipótese nula. A um nível de significância de 5%, não podemos negar a afirmação de que a variável segue a distribuição especificada.

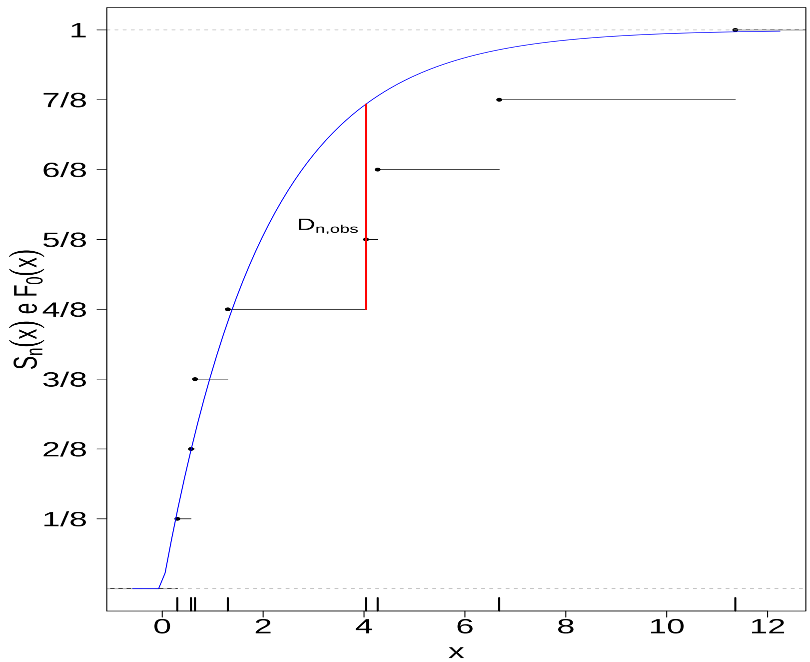

Figura 1: Funções distribuição e $D_{n,\text{obs}}$ na questão 3.

Tabela N2: Distribuição binomial(9, 1/2).

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathrm{P}(X = x)$	0,002	0,018	0,070	0,164	0,246	0,246	0,164	0,070	0,018	0,002
$\mathrm{P}(X \leq x)$	0,002	0,020	0,090	0,254	0,500	0,746	0,910	0,980	0,998	1,000

(b) A partir da Tabela N3, percebemos que $0,358 < D_{n,\text{obs}} < 0,410$. Portanto, podemos afirmar que $0,10 <$ valor-$p < 0,20$. De fato, valor-p = 0,1784.
A Figura 1 mostra uma solução gráfica do problema.

Nota 1. A função massa de probabilidade de uma variável aleatória X com distribuição binomial(9, 1/2) é dada na Tabela N2.

Nota 2. Na Tabela N3 são apresentados alguns valores de probabilidades da cauda direita da distribuição da estatística de Kolmogorov-Smirnov para $n = 8$.

Tabela N3: Distribuição da estatística de Kolmogorov-Smirnov para $n = 8$.

d	0,358	0,410	0,454	0,542
$\mathrm{P}(D_8 \geq d)$	0,20	0,10	0,05	0,01