1. Basta fazermos uma combinação linear nula dos vetores dados e vermos se a única solução é quando todos os coeficientes forem nulos, e neste caso o conjunto é l.i. Caso contrário, se pelo menos um dos coeficientes não for nulo, o conjunto é l.d.

   (a) Fazendo a combinação linear ficamos com $\alpha(1,1,1) + \beta(1,2,1) + \gamma(2,1,2) = 0 = (0,0,0)$. Disso obtemos um sistema de três equações (uma para cada coordenada) nas variáveis α, β e γ. Resolvendo o sitema, ficamos com $\alpha = -3\gamma$ e $\beta = \gamma$. Como $\gamma \in \mathbb{R}$ é qualquer, temos que os coeficientes não são todos nulos, (basta tomarmos $\gamma \neq 0$), de modo que o conjunto é l.d. Dá para ver também que sendo $u = (1,1,1)$, $v = (1,2,1)$ e $w = (2,1,2)$, vale $w = 3u - v$, ou seja, um dos vetores é combinação linear dos outros.

   (b) Esse é análogo ao anterior, com a diferença de que aqui você terá de igualar os coeficientes dos termos de mesmo grau a zero. Esse conjunto é l.i.

   (c) Vale o mesmo que foi feito nos anteriores, com a diferença de que aqui você terá de igualar as entradas da matriz a zero. Esse também é l.i.

   (d) Nesse caso, ficamos com o seguinte: $\alpha 1 + \beta \sin(x) + \gamma \cos(x) = 0$, onde 1 é a função constante igual a 1 e 0 é a função identicamente nula. Os coeficientes independem da escolha do x, mas a equação anterior tem de ser válida para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Então podemos ter ifinitas equações, uma para cada $x \in [0, 2\pi]$, pois para outros valores o seno e o cosseno ficam repetindo de modo que obtemos as mesmas equações. Entretanto bastam 3 equações distintas (que não tem nenhuma relação entre si) para encontrarmos os valores de α, β e γ. Se tomarmos as equações relativas a $x = \pi/2$, $x = 3\pi/2$ e $x = \pi$, obtemos como única solução $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Então $\{1, \sin, \cos\}$ é um conjunto l.i.

   (e) Como anteriormente, temos que $\alpha e^x + \beta e^{-x} = \alpha e^x + \frac{\beta}{e^x} = \alpha e^{2x} + \beta = 0$. Observe que os coeficientes não dependem de x e a igualdade anterior tem de ser válida para todo x real. Tomemos $x = 0$ e $x = \ln(2)/2$. Isso nos leva a $\alpha = \beta = 0$, de modo que $\{e^x, e^{-x}\}$ é l.i.

2. Suponhamos que f, g são l.d e que existe $x \in (a,b)$ tal que $f(x)g'(x) \neq f(x)'g(x)$. Como f e g são l.d, podemos supor, sem perda de generalidade, que $f = \lambda g$. Então $f' = \lambda g'$, de modo que $\lambda = f/g = f'/g' \Rightarrow fg' = f'g$. Ora a última equação, se f e g forem de fato l.d, deve valer para qualquer $x \in (a,b)$. Mas, por hipótese, existe um x para o qual a igualdade anterior não é satisfeita. Contradição, ou seja, $\{f, g\}$ é l.i.

3. Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é l.i, então $a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = 0 \Rightarrow a_1 = \ldots = a_n = 0$. Tomemos agora uma combinação linear dos vetores de $\{v_1 - v_2, \ldots, v_{n-1} - v_n, v_n\}$: $b_1(v_1 - v_2) + \ldots + b_{n-1}(v_{n-1} - v_n) + b_n v_n = b_1 v_1 + (b_2 - b_1) v_2 +$

$\ldots + (b_n - b_{n-1})v_n$, ora mas $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é l.i, de modo que $b_1 = (b_2 - b_1) = \ldots = (b_n - b_{n-1}) = 0 \Rightarrow b_1 = \ldots = b_n = 0$, e portanto $\{v_1 - v_2, \ldots, v_{n-1} - v_n, v_n\}$ também é l.i.

4. As afirmações ou são falsas ou são verdadeiras. Mostramos que ela é falsa dando um único contra-exemplo e que é verdadeira dando a prova.

   (a) Se formos só pela nossa intuição, essa afirmação parece ser falsa. Para mostar que ela é de fato falsa peguemos um único contra-exemplo, ou seja peguemos dois conjuntos l.i tais que a união deles não é l.i. Por exemplo, $\{(1,0),(0,1)\}$ e $\{(1,1),(0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$. A união deles dá $\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$, mas $(1,1) = (1,0) + (0,1)$, ou seja a união de tais conjuntos é l.d. Então, de fato, a afirmação é falsa. Observe que como $dim\, \mathbb{R}^2 = 2$ então os subconjuntos l.i de $\mathbb{R}^2$ têm no máximo 2 elementos ...

   (b) Novamente parece que essa afirmação é falsa. Peguemos um contra-exemplo, ou seja, dois conjuntos l.i tais que a sua união ainda seja l.i. Por exemplo, $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0)\}$ e $\{(0,0,1,0),(0,0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^4$, cuja união dá $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ que é base do $\mathbb{R}^4$, ou seja é l.i. Portanto, a afirmação não é verdadeira.

   (c) Essa também tem jeito de ser falsa. Se conseguimos arranjar dois conjuntos l.i tais que sua intersecção é vazia (ou seja, tais que eles são disjuntos, não tem nenhum elemento em comum) e tal que sua união seja l.d, fica provado que a afirmação é falsa. Peguemos por exemplo $\{(1,0),(0,1)\}$ e $\{(1,1),(-1,1)\} \subset \mathbb{R}^2$. Eles são l.i e não tem nenhum elemento em comum, mas a união $\{(1,0),(0,1),(1,1),(-1,1)\}$ é l.d. Assim, a afirmação é falsa.

   (d) Um conjunto U é parte de um conjunto V quando todo elemento de U também é elemento de V. Nesse caso, a sua união dá simplismente V. Se U é parte de V e se eles forem l.i, então a sua união (que é igual a V) também é l.i, e a afirmação e verdadeira.

   (e) Essa parece ser falsa. Tente dar um contra-exemplo, ou seja, tente achar dois conjuntos l.i e tais que um deles é disjunto do espaço gerado pelo outro, mas que sua união seja l.d.

   (f) Desconfiamos que essa seja falsa. Tente dar um contra-exemplo.