PIPGEs ICMC – USP/UFSCar

EST5102 – Inferência Estatística – 2024/1

4ª lista de exercícios

1. Sejam $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{normal}_m(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, sendo que

$$f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = (2\pi)^{-m/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right\} I_{\mathbb{R}^m}(\boldsymbol{x}),$$

   com $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$ e $\boldsymbol{\Sigma}$ é uma matriz $m \times m$ simétrica definida positiva. Apresente estatísticas conjuntamente suficientes para $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\Sigma}$.

2. Sejam $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{normal}(\mu, \sigma^2)$. Apresente o EMV do q-ésimo quantil da distribuição, $0 < q < 1$.

3. Considere $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\top \sim \mathsf{multinomial}_k(n, \boldsymbol{\theta})$, em que $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_k)^\top$, $\sum_{j=1}^k \theta_j = 1$ e $0 < \theta_j < 1$, $j = 1, \ldots, k$, com n conhecido. Apresente o EMV de $\boldsymbol{\theta}$.

4. Uma amostra aleatória de n observações foi obtida de uma variável aleatória X com distribuição $\mathsf{exponencial}(\theta)$. As observações com valores maiores do que x_0 não foram registradas, x_0 conhecido (ou seja, sabe-se apenas que $X > x_0$). Na amostra existem N_0 valores maiores do que x_0, $0 \leq N_0 \leq n$. Apresente o EMV de θ considerando $N_0 < n$. O que acontece quando $N_0 = n$?

5. Deve ser estimada a esperança de uma variável aleatória com distribuição $\mathsf{Poisson}(\theta)$. Em uma amostra aleatória de tamanho n, dispomos do número de observações maiores do que 0.

   (a) Apresente um estimador de θ pelo método dos momentos.

   (b) Apresente o EMV de θ.