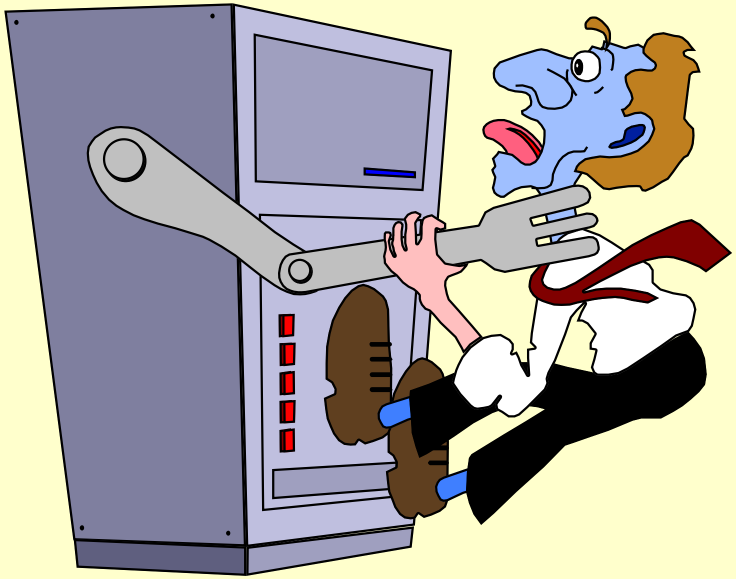
# Máquinas de Turing



Máquinas de Turing podem fazer tudo o que um computador real faz.

Porém, mesmo uma Máquina de Turing não pode resolver certos problemas. Estes problemas estão além dos limites teóricos da computação

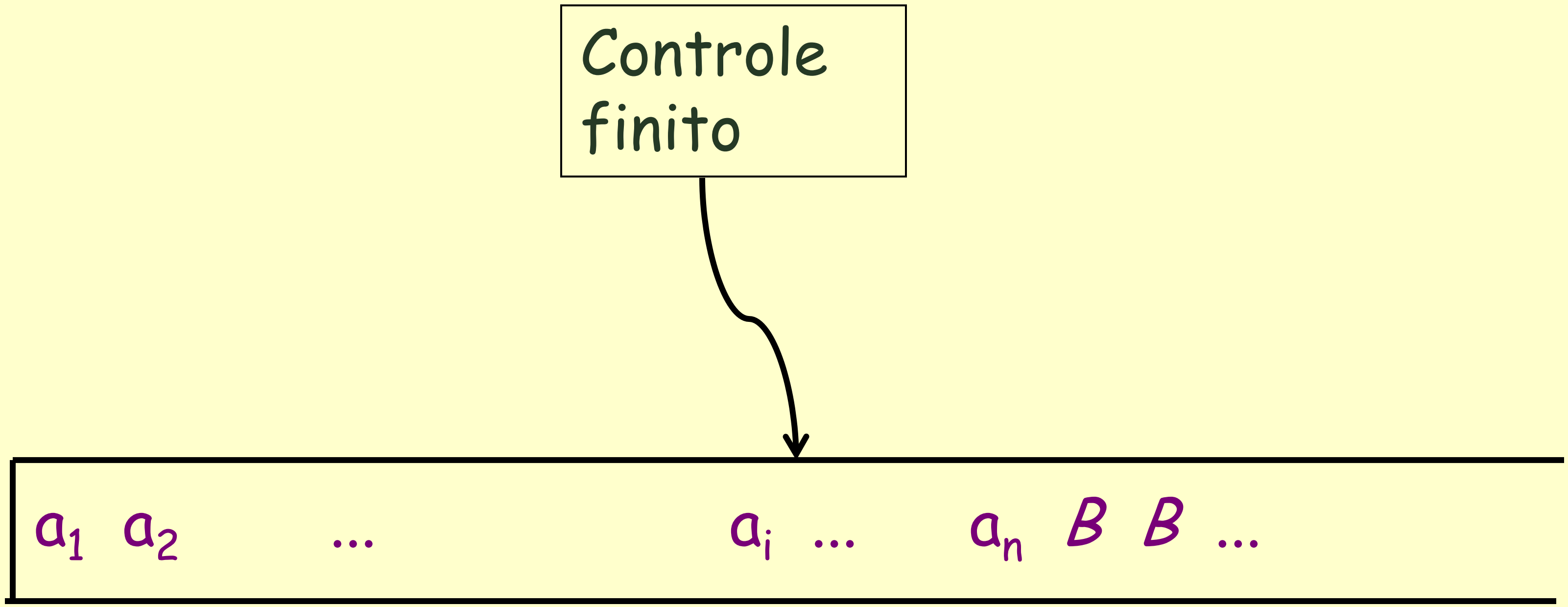
# História

- Turing (1936): Máquinas de Turing como modelo de função computável.
- Tese de Church-Turing: qualquer modelo geral de computação permite calcular as mesmas funções (ou, tudo o que se pode computar coincide com as linguagens reconhecidas pelas Máquinas de Turing).

# Máquina de Turing

- É uma máquina de estados finitos, M, que reconhece uma linguagem, a L(M)
- Ou seja, dada uma cadeia, após uma sequência de mudanças de estados, a M eventualmente para com a resposta SIM, se a cadeia pertence à L(M), ou NÃO, se não pertence.

# Máquina de Turing




Inicialmente, a entrada é colocada na fita infinita. Todas as outras células têm um símbolo especial da fita, *B* (*branco*).
A cabeça da fita fica posicionada em uma das células. No início, a cabeça está posicionada na célula mais à esquerda que contém a entrada.

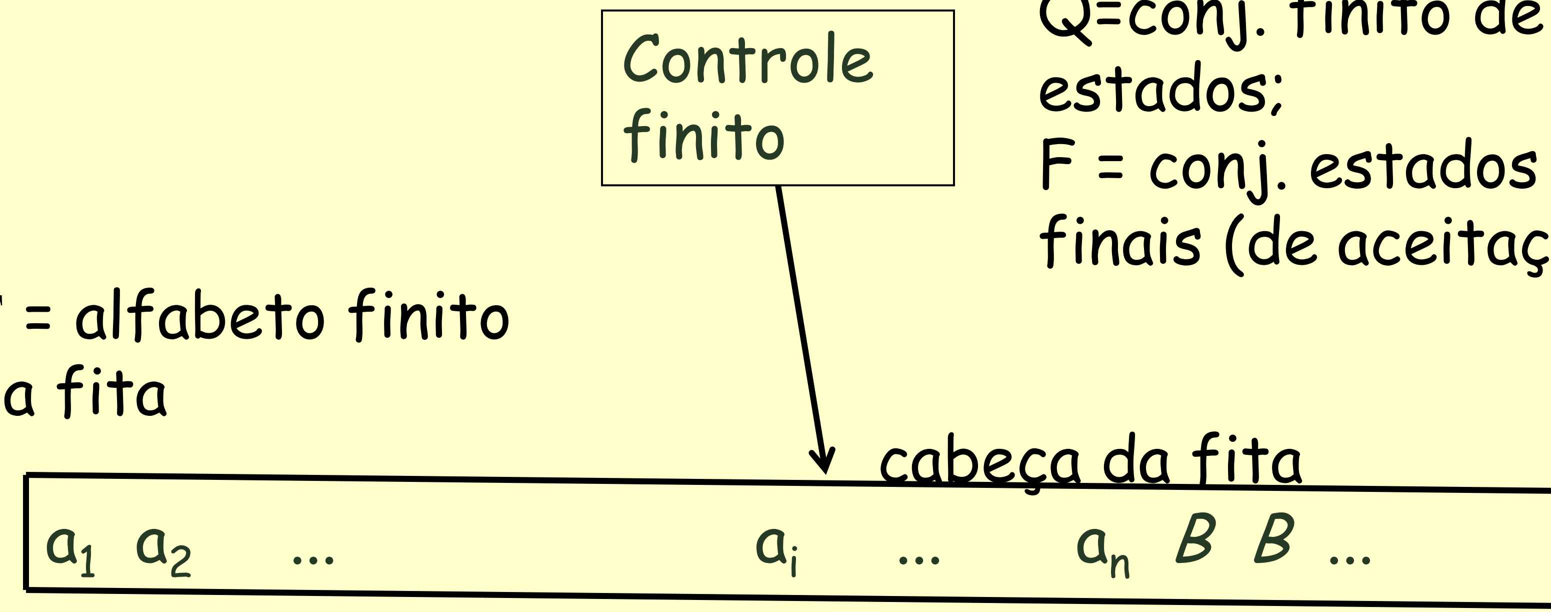
Um *movimento* da MT é uma função do estado do controle finito e do símbolo atual da fita. Em um movimento, a MT:

1. Mudará de estado (opcionalmente para o mesmo).
2. Gravará um símbolo de fita na célula atual, substituindo o existente (podendo ser o mesmo).
3. Movimentará (necessariamente) a cabeça da fita uma célula à esquerda ou à direita.

- Uma vez iniciados os movimentos, a MT só para se não houver um movimento previsto, ou seja, se para o estado e o símbolo atuais, não há um movimento previsto.
- Para indicar a aceitação de uma cadeia, quando a MT parar, ela deve estar num estado de aceitação – ou estado final.
- Se, ao parar, a MT não estiver num estado final, então a MT rejeita a cadeia de entrada.

# MT: notação formal

**$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, qo, F)$**




Q=conj. finito de estados;
F = conj. estados finais (de aceitação)

$\Gamma$ = alfabeto finito da fita

$\Sigma$ = alfabeto finito de entrada

# Máquina de Turing

Os movimentos da MT são definidos por uma Função de transição $\delta$:

$\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L,R\}$

Ou seja, $\delta(q,a) = (p,b,D)$ onde:

- *p* é o próximo estado em Q;
- *b* é o símbolo que substituirá *a* na fita;
- *D* é uma direção (esquerda ou direita) em que a cabeça da fita irá se mover.

# A linguagem de uma MT

- Intuitivamente: a cadeia de entrada é colocada na fita, e a cabeça da fita começa no símbolo mais à esquerda da cadeia. Se a MT parar eventualmente num estado de aceitação (de F), a entrada é dita *aceita ou reconhecida*; caso contrário, não.

- Assim, a Linguagem L(M) Aceita ou Reconhecida por uma MT, M = (Q, $\Sigma$, $\Gamma$, $\delta$, qo, F), é o conjunto de cadeias $w = w_1w_2...w_n$ em $\Sigma^*$ tais que $\delta(q_o, w_1)$ leva a uma sequência de transições que culminem num estado p de F (aceitação por estado final). Não importa o conteúdo final da fita neste caso!

# A linguagem de uma MT

- As linguagens aceitas por MT são também chamadas de *linguagens recursivamente enumeráveis (LRE)*

- Pela Tese de Church, as funções computáveis coincidem com as LRE

# MT e sua parada

- Há uma outra noção de "aceitação" para MT: a aceitação por parada. Em geral, usada quando o conteúdo final da fita representa alguma resposta ao problema que a MT representa.

- Dizemos que uma MT *para* se ela entra em um estado q, olhando um símbolo de fita a, e não existe qualquer movimento previsto nessa situação, i.e., $\delta(q,a)$ é indefinida. Não se define o conjunto de estados finais F nesse caso.

# Usos de uma MT

- como reconhecedor de linguagens

- para calcular funções (resolver problemas)

# Usos de uma MT

- como reconhecedor de linguagens

(A linguagem corresponde ao conjunto de instâncias que geram resposta SIM ao problema de decisão associado: *esta cadeia pertence à linguagem L(M)?* ou *esta é uma solução do problema?*)

- para calcular funções

(equivale ao problema propriamente dito)

# Exemplo

- Vamos projetar uma MT para reconhecer

$$L = \{0^n1^n \mid n \geq 1\}$$

Ou seja, para toda entrada de cadeias de 0s seguidos de 1s, em igual número, a MT deve parar num estado final. Para as demais cadeias binárias, deve parar num estado não final.

Ex.: 01, 0011, 000111 fazem parar num estado final;

1, 10, 001, 1010 fazem parar num estado não final.

Fita inicial: 000...111*BBBBBB*

- Estratégia: em cada passo, a MT trocará um 0 por um X, e depois um 1 por um Y, até todos os 0s e 1s terem sido trocados aos pares.

# Exemplo

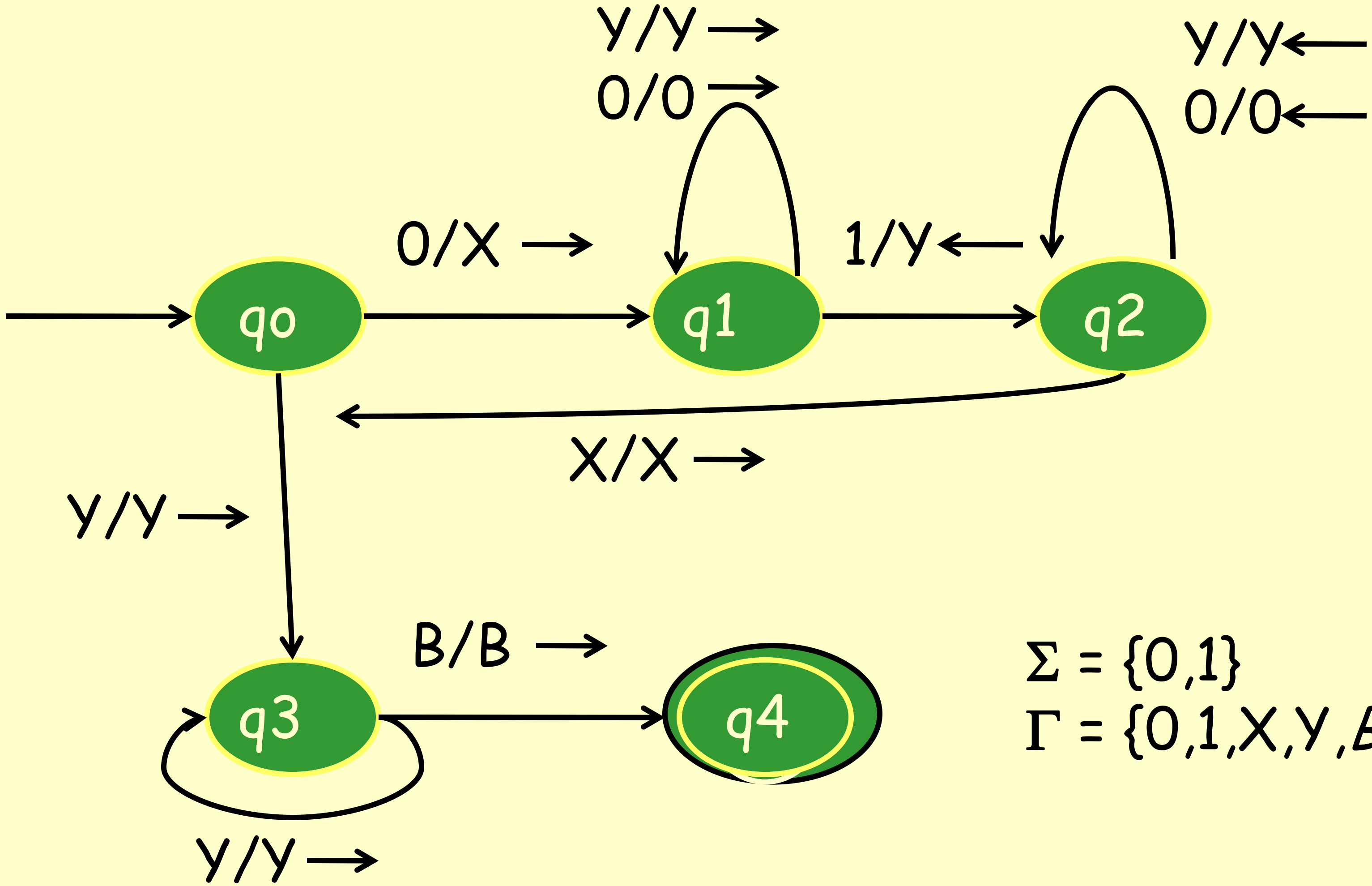
- Estratégia: em cada passo, a MT trocará um 0 por um X, e depois um 1 por um Y, até todos os 0s e 1s terem sido trocados aos pares.

- Em cada passo, da esq. para dir., ela troca um 0 por X e vai para a direita, ignorando 0s e Ys até encontrar 1. Troca esse 1 por Y e se move para a esquerda, ignorando Ys e 0s, até encontrar um X. Procura um 0 a direita e troca por X, repetindo o processo.

- Se a entrada não for da forma $0^n1^n$ eventualmente a MT não vai ter um movimento previsto (previmos apenas os movimentos para cadeias válidas) e vai parar sem aceitar, ou seja, num estado que não é de F.

- Se, por outro lado, na busca por mais um 0, ela só encontrar Xs e Ys, então ela descobre que deve aceitar a entrada, e vai para um estado final.

# Diagrama de Transição




$\Sigma = \{0,1\}$
$\Gamma = \{0,1,X,Y,B\}$

$M = (\{q0, q1, q2, q3, q4\}, \{0,1\}, \{0,1,X,Y,B\}, \delta, q0, \{q4\})$

| Estado | 0 | 1 | X | Y | B |
|---|---|---|---|---|---|
| → qo | (q1,X,R) | -- | -- | (q3,Y,R) | -- |
| q1 | (q1,0,R) | (q2,Y,L) | -- | (q1,Y,R) | -- |
| q2 | (q2,0,L) | -- | (qo,X,R) | (q2,Y,L) | -- |
| q3 | -- | -- | -- | (q3,Y,R) | (q4,B,R) |
| q4* | -- | -- | -- | -- | -- |

Verifique se a cadeia 000111 é aceita

# Complexidade de uma MT

- A complexidade do algoritmo subjacente a uma MT é dada pelo número de passos (mudanças de estado) sobre a cadeia de entrada.
  - Equivale a quantas vezes a MT lê ou passa por cada célula onde está a cadeia de entrada.

- Qual é a complexidade da MT que reconhece $L = \{0^n1^n \mid n \geq 1\}$ ?
- Se n é o tamanho da cadeia de entrada;
- (a) Em cada passo, busca-se um 0 e um 1 na cadeia, portanto, no máximo todos os símbolos da cadeia são lidos;
- (b) O número de passos é função do número de pares de 0 e 1, ou seja, do tamanho da cadeia.
- Logo, (a) * (b) = $O(n^2)$

# Exercício

- Construa uma MT para reconhecer cadeias de $L=\{w\#w \mid w \in \{0,1\}^*\}$

Estágios para a resolução:

- Verifique (em zigue-zague) se antes e depois do # existem os mesmos símbolos, cc rejeite.
- Ao checar um símbolo, marque-o (use um X por exemplo) para ter controle sobre os que estão sendo analisados num dado momento.
- Quando todos os da esquerda forem checados (com X) verifique se existe algum símbolo à direita ainda não checado. Se houver, rejeite; cc aceite.
- Complexidade: Por raciocínio análogo ao anterior, $O(n^2)$

# MT como um processador de funções inteiras

- Tradicionalmente, os inteiros são representados em vocabulário unário.
- O inteiro i >= 0 é representado pela cadeia $0^{i}$.
- Se a função tem k argumentos ($i_1$, $i_2$, ..., $i_k$) então esses inteiros são colocados na fita separados por 1´s como:

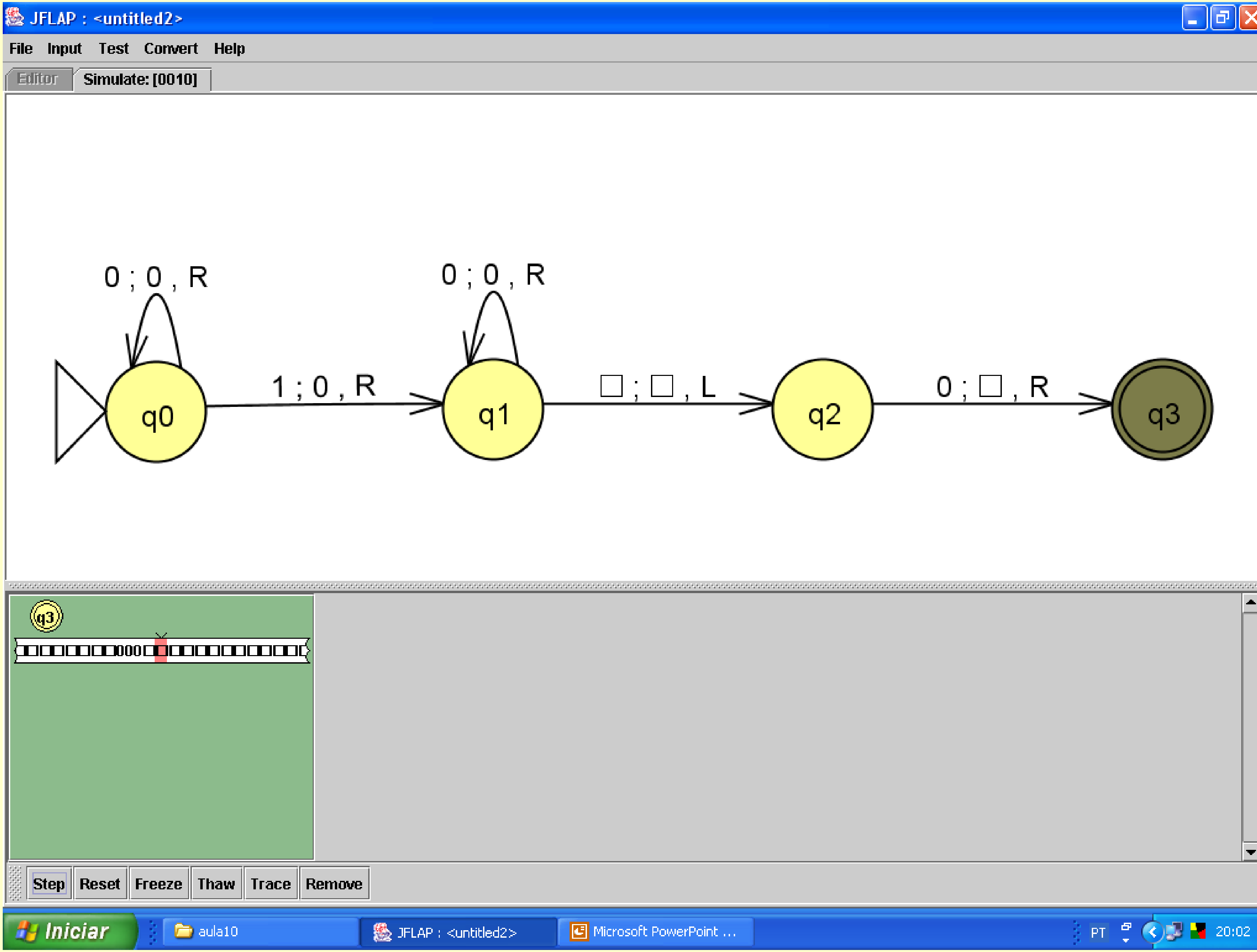
$$0^{i1}\ 1\ 0^{i2}\ 1 \ldots 1\ 0^{ik}$$

- O inverso também é possível.
- Se a máquina para (não importa em que estado) com a fita consistindo de $0^m$ para algum m, então dizemos que $f(i_1,i_2,\ldots i_k) = m$, onde f é uma função de k argumentos computados por essa MT.

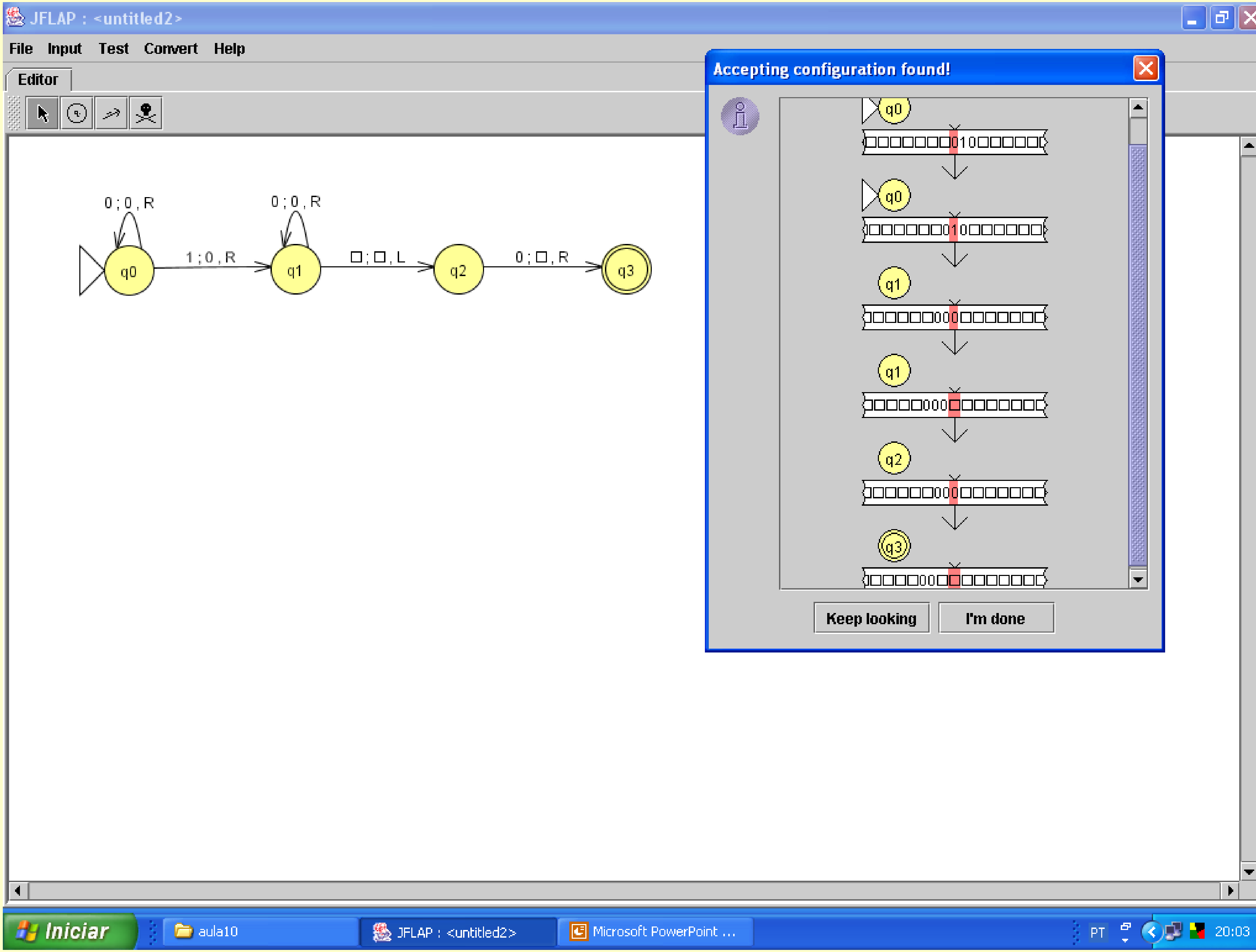
# Exemplo: MT que soma dois números naturais, a + b

- Conteúdo inicial da Fita: $0^a\, 1\, 0^b\, B$...
- Quando a MT parar, o conteúdo da fita dever ser:

  $0^{a+b}\, B$....
- Processo:
- Ler o 0 mais à esquerda, mantendo-o como 0, e mover à direita até encontrar o 1.
- Substitua o 1 por 0 (nesse momento a cadeia da fita é $0^{a+b+1}$. Continue movendo à direita sem mudar a fita, até que um *B* seja encontrado.
- Mantenha o *B* e mova a esquerda para encontrar o último 0 mais a direita.
- Substitua esse 0 por *B*. O resultado é $B\, 0^{a+b}$
- Qual é a complexidade desse algoritmo?



JFLAP : <untitled2>
File Input Test Convert Help
Editor
Simulate: [0010]
0 ; 0 , R
0 ; 0 , R
1 ; 0 , R
□ ; □ , L
0 ; □ , R
q0
q1
q2
q3
q3
Step
Reset
Freeze
Thaw
Trace
Remove
Iniciar
aula10
JFLAP : <untitled2>
Microsoft PowerPoint ...
PT
20:02



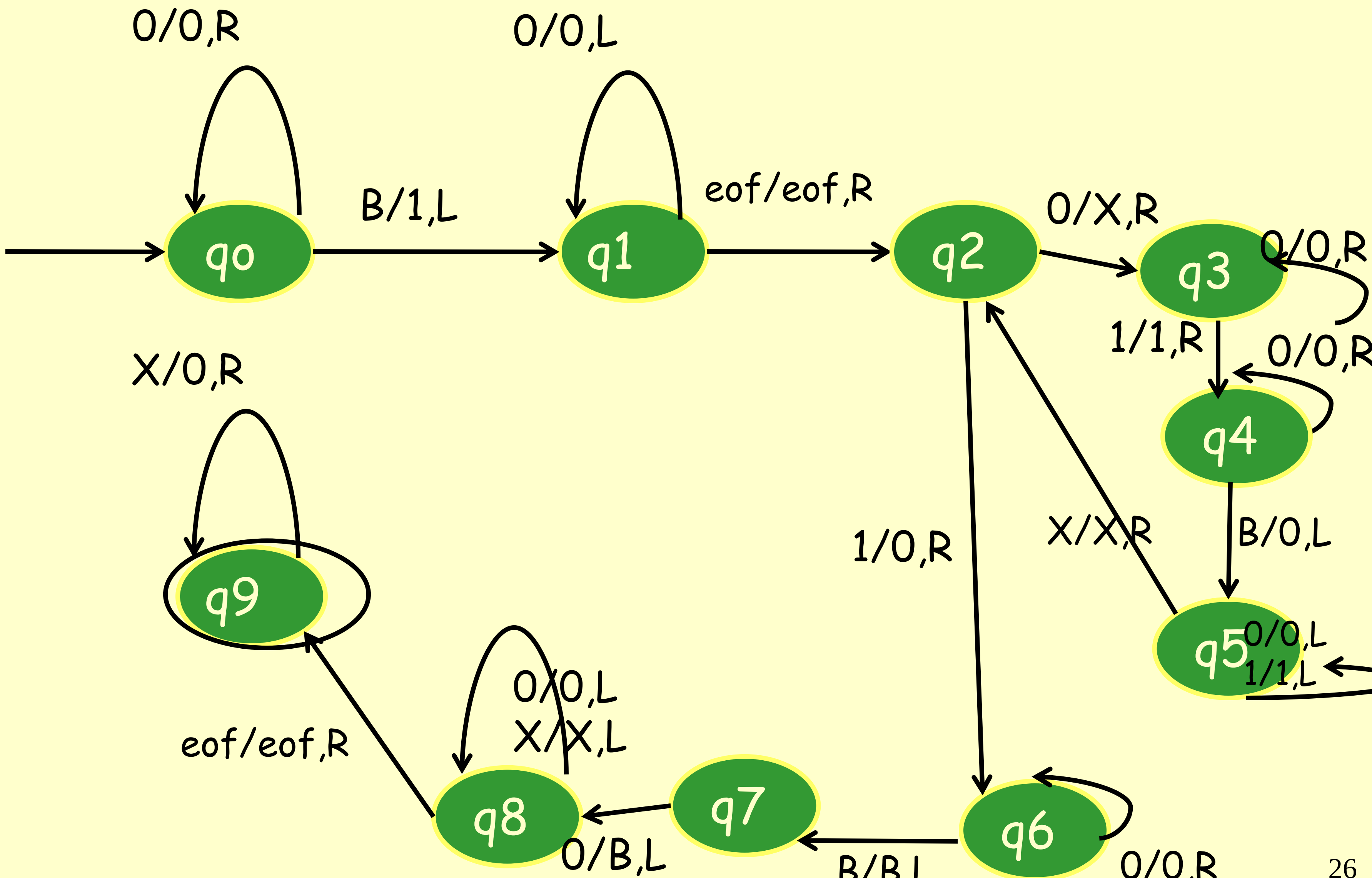
JFLAP : <untitled2>
File Input Test Convert Help
Editor
0 ; 0 , R
0 ; 0 , R
1 ; 0 , R
□ ; □ , L
0 ; □ , R
q0
q1
q2
q3
Accepting configuration found!
Keep looking
I'm done
Iniciar
aula10
JFLAP : <untitled2>
Microsoft PowerPoint ...
PT
20:03

# Exemplo: MT que multiplica um número natural por 2: a * 2

- Conteúdo inicial da Fita: $0^a$ *B*...
- Quando a MT parar, o conteúdo da fita dever ser:

  $0^{a+a}$ *B*....

- Sugestão:
- Grave 1 depois do último 0.
- Grave o mesmo número de 0s da entrada, à direita do 1. Haverá necessidade de substituir os 0s originais por X, p.ex.
- Substitua o 1 por 0 (nesse momento a cadeia da fita é $X^a0^{a+1}$). Continue movendo à direita sem mudar a fita, até que um *B* seja encontrado.
- Mantenha o *B* e mova a esquerda para encontrar o último 0 mais a direita. Substitua esse 0 por *B*, para obter $X^a0^a$.
- Substitua todos os X por 0. O resultado é $0^{a+a}$



q0
q1
q2
q3
q4
q5
q6
q7
q8
q9
0/0,R
B/1,L
0/0,L
eof/eof,R
0/X,R
0/0,R
1/1,R
0/0,R
B/0,L
X/X,R
0/0,L
1/1,L
1/0,R
0/0,R
B/B,L
0/B,L
0/0,L
X/X,L
eof/eof,R
X/0,R

- F é vazio se a MT computa uma função.

- F é relevante quando a MT é usada para reconhecer uma linguagem.

# Ex. Uma MT para reconhecer a Linguagem

$$L = \{ a^n b^n c^n \mid n \geq 0 \}$$

*Exemplos:*

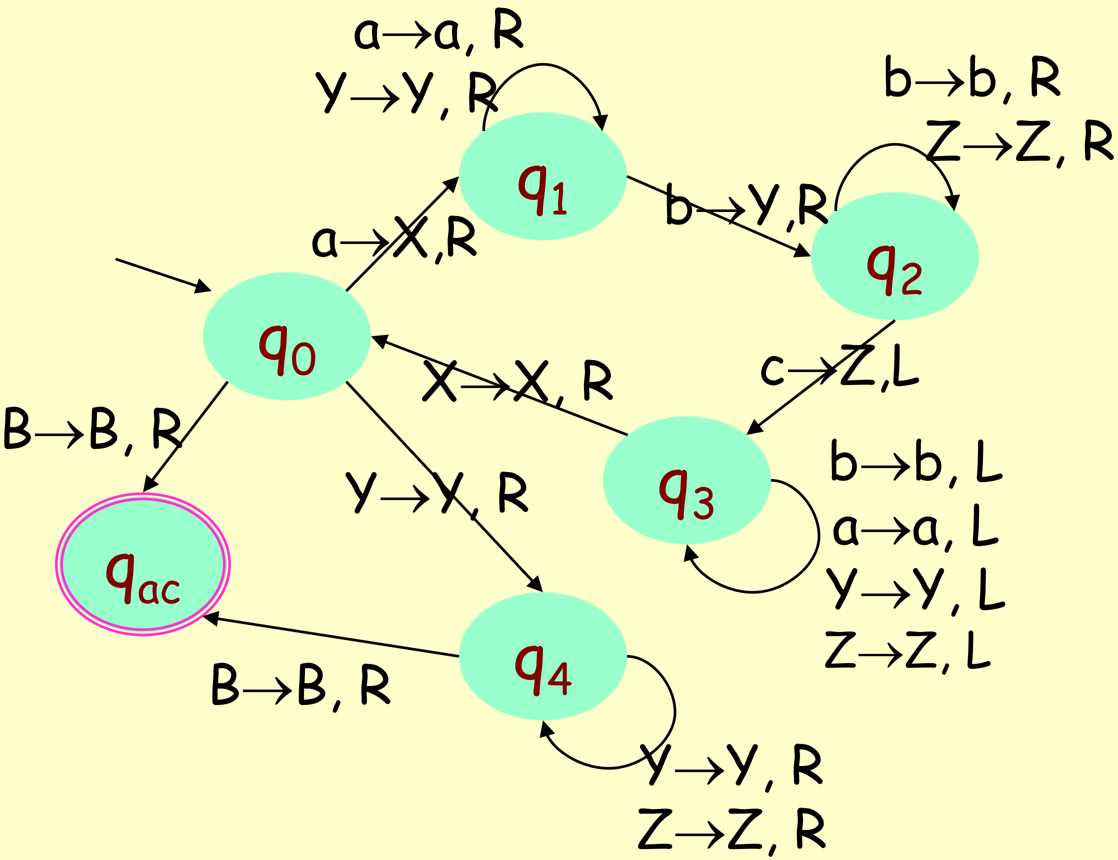
*Pertence à L:* aaabbbccc

*Não Pertence à L:* aaabbcccc

# A Máquina deTuring

1. $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_{ac}\}$
2. $\Sigma = \{a, b, c\}$
3. $\Gamma = \{a, b, c, B, X, Y, Z\}$
4. $\delta$ a seguir.
5. $q_0$ – o estado inicial
6. $F = \{q_{ac}\}$

Ideia: em cada passo, reconhecer um a, um b e um c, substituindo-os por X, Y e Z, respectivamente.



# Exercícios

1) Construir uma MT que decida se uma sequência de parênteses é bem formada.

- Dica: considere que a cadeia de parênteses é limitada por 2 A´s (um a esq. e outro à direita).
- Ideia: Em cada passo, procure por um ) e substitua por X; em seguida, volte à esquerda procurando o ( mais próximo para substituir por X também.
- A entrada será aceita se num certo passo não houver mais ) para marcar e só restar Xs na fita.

2) Construir uma MT tal que, dada uma cadeia w pertencente a {0,1}*, duplique w. Quando a máquina parar, a fita deve conter w#w sendo que # indica fim de w.

# Exercício

Faça uma MT que reconheça L = {x | x $\in$ {a,b,c}* e x é uma permutação de $a^n b^n c^n$ para algum n >= 0}

Exs.: aabbcc √ babacc ✗

bca √ aabccc ✗

cccaaabbb√ aacc ✗