

1. Uma caixa contém bolas vermelhas e bolas pretas. Quando duas bolas são retiradas ao acaso, a probabilidade de que ambas sejam vermelhas é igual a $1/2$. Qual é o menor número de bolas na caixa? Considere diferentes quantidades de bolas pretas na caixa (1, 2, etc).

Resultado. Para r e $b > 0$, vale a desigualdade

$$\frac{r}{r+b} > \frac{r-1}{r+b-1}.$$

2. A e B são eventos de (Ω, \mathcal{F}, P) . Se A e B são independentes, prove que também são independentes os pares de eventos (i) A e B^c , (ii) A^c e B e (iii) A^c e B^c .
3. A e B são eventos de (Ω, \mathcal{F}, P) .
 - (a) Se $P(A^c) = p_1$ e $P(B^c) = p_2$, prove que $P(A \cup B) \geq 1 - p_1 - p_2$.
 - (b) Se $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ e $P(A|B) \geq P(A)$, prove que $P(B|A) \geq P(B)$.
4. (a) Apresente um espaço (Ω, \mathcal{F}, P) e eventos A e B tais que $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ e $P(A|B) > P(A)$.
(b) Apresente um espaço (Ω, \mathcal{F}, P) e eventos A e B tais que $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ e $P(A|B) < P(A)$.

Os exercícios 5–8 e 9–10 encontram-se em [1] e [2], respectivamente.

5. Exercício 16, §1.2, exceto (c).
6. Exercício 19, §1.2.
7. Exercício 21, §1.2.
8. Exercício 22, §1.3.
9. Exercício 115, p. 60.
10. Exercício 116, p. 60.

Referências

- [1] James, B. R. *Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário*, 3ª ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2006.
- [2] Magalhães, M. N. *Probabilidade e Variáveis Aleatórias*, 2ª ed., São Paulo: EDUSP, 2004.