UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DE COMPUTAÇÃO
Departamento de Ciências de Computação

SCC-5809 - Capítulo 7 Neurodinâmica e Redes Associativas

João Luís Garcia Rosa[1]

[1]SCC-ICMC-USP - joaoluis@icmc.usp.br

2012

Sumário

Sumário

Neurodinâmica

- *Neurodinâmica*: RNAs vistas como sistemas dinâmicos não-lineares (SDNL), com ênfase no problema da *estabilidade*.
- A estabilidade de um SDNL é característica de todo o sistema.
- "A presença de estabilidade sempre implica alguma forma de coordenação entre as partes individuais do sistema." [1]
- A estabilidade mencionada aqui é no sentido do *método direto de Lyapunov* de 1892, usado para análise de estabilidade de sistemas lineares e não-lineares, invariante e variante no tempo: aplicável diretamente para RNA!

Neurodinâmica determinística

- O estudo da neurodinâmica pode ser dividido em:
  1. *Neurodinâmica determinística*: na qual o modelo de RNA tem um comportamento determinístico descrito por um conjunto de *equações diferenciais não-lineares* que definem a evolução exata do modelo como uma função do tempo.
  2. *Neurodinâmica estatística*: na qual o modelo de RNA é perturbado pela presença de ruído. Neste caso, deve-se tratar com *equações diferenciais não-lineares estocásticas* que expressam a solução em termos probabilísticos. A combinação da estocasticidade e não-linearidade torna-a mais difícil de tratar.
- Este capítulo será restrito à neurodinâmica determinística.

Sistemas Dinâmicos

- Para proceder com o estudo da neurodinâmica, é necessário um *modelo matemático espaço-estado*.
- Conjunto de *variáveis de estado* cujos valores devem conter informação suficiente para predizer a evolução futura do sistema.
- Sejam $x_1(t)$, $x_2(t)$, ... $x_N(t)$ as variáveis de estado de um sistema dinâmico não-linear onde o tempo contínuo t é a *variável independente* e N é a *ordem* do sistema.
- Para facilitar a notação, um *vetor de estados* N-por-1 $\mathbf{x}(t)$ contém essas variáveis.

Sistemas Dinâmicos

- A dinâmica de sistemas dinâmicos não-lineares pode ser representada na forma de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem:

$$\frac{d}{dt}x_j(t) = F_j(x_j(t)), \quad j = 1, 2, ..., N \tag{1}$$

onde $F(\cdot)$ é uma função não-linear. Posto em forma compacta:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \tag{2}$$

onde a função não-linear **F** é um vetor em que cada elemento opera em um elemento correspondente do vetor de estados

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), ..., x_N(t)]^T \tag{3}$$

Sistemas Dinâmicos

- Um sistema dinâmico não-linear para o qual a função vetor $\mathbf{F}(\mathbf{x}(t))$ não dependa *explicitamente* do tempo t, como na eq. 2, é chamado de *autônomo*.
- Independentemente da forma exata da função não-linear $\mathbf{F}(\cdot)$, o vetor de estados $\mathbf{x}(t)$ deve variar com o tempo t; caso contrário $\mathbf{x}(t)$ é constante e o sistema não é dinâmico.

  Um sistema dinâmico é um sistema cujo estado varia com o tempo.

- Pode-se pensar em $d\mathbf{x}/dt$ como um vetor "velocidade", não em termos físicos, mas num sentido abstrato.
- Então, de acordo com a eq. 2, pode-se referir à função vetor $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ como um campo vetor velocidade ou simplesmente como um *campo vetor*.

Sumário

Movimento de um ponto

- A equação espaço-estado 2 descreve o *movimento* de um ponto em um *espaço de estados* N-dimensional.
- O espaço de estados pode ser um *espaço euclidiano* ou um subconjunto deste.
- Pode ser também um espaço não-euclidiano como um círculo, uma esfera, uma tora ou algum outro elemento *diferenciável*.
- O interesse porém está confinado em um espaço euclidiano.

Movimento de um ponto

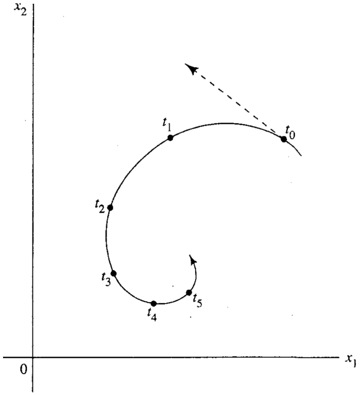
- O espaço de estados é importante porque provê uma ferramenta visual/conceitual para analisar a dinâmica de um sistema não-linear descrito pela eq. 2.
- Isso é feito focando a atenção às *características globais* do movimento ao invés dos aspectos detalhados de soluções analíticas ou numéricas da equação.
- Num determinado instante de tempo t, o estado observado do sistema (isto é, o vetor estado $\mathbf{x}(t)$) é representado por um único ponto no espaço de estados N-dimensional.
- Mudanças no estado do sistema com o tempo t são representadas como uma curva no espaço de estados, com cada ponto na curva carregando (explícita ou implicitamente) um rótulo que grava o tempo da observação.

Movimento de um ponto

- Esta curva é chamada de *trajetória* ou *órbita* do sistema.
- A figura 1 ilustra a trajetória de um sistema bidimensional.
- A velocidade instantânea da trajetória (isto é, o vetor velocidade $d\mathbf{x}(t)/dt$) é representada por um *vetor tangente*, mostrado como uma linha tracejada na figura 1 para o tempo $t = t_0$.
- Pode-se derivar o vetor velocidade para cada ponto da trajetória.

Movimento de um ponto

Figure 1 : Uma trajetória bidimensional (órbita) de um sistema dinâmico [2].

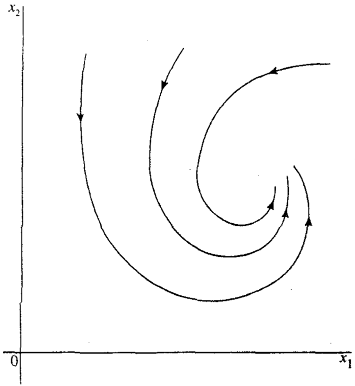


Movimento de um ponto

- A família de trajetórias, para condições iniciais diferentes, é referida como a *representação de estados* do sistema.
- A representação de estados inclui *todos* os pontos no espaço de estado onde o vetor campo $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ é definido.
- Note que para um sistema autônomo haverá apenas uma trajetória passando através de um estado inicial.
- Uma ideia útil que emerge da representação de estados é o fluxo de um sistema dinâmico, definido como o movimento do espaço de estados dentro dele mesmo.
- Em outras palavras, pode-se imaginar o espaço de estados fluindo, como um fluido, em volta de si com cada ponto (estado) seguindo uma trajetória particular (figura 2).

Movimento de um ponto

Figure 2 : Uma representação de estados (fases) bidimensional de um sistema dinâmico [2].

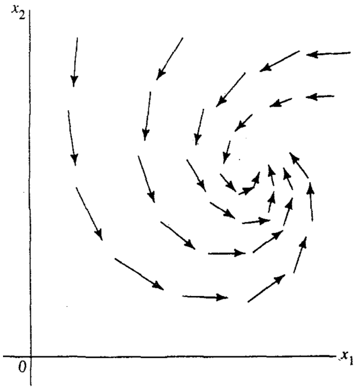


Movimento de um ponto

- Dada uma representação de estados de um sistema dinâmico, pode-se construir um campo de vetores velocidade (tangentes), um para cada ponto do espaço de estados.
- Na figura 3, mostra-se vários vetores velocidade para dar um ideia de como um campo completo seria.
- A utilidade de um campo vetor está no fato que ele dá uma descrição visual da tendência inerente de um sistema dinâmico de se mover com uma velocidade habitual em cada ponto específico de um espaço de estados.

Movimento de um ponto

Figure 3 : Um campo vetor bidimensional de um sistema dinâmico [2].



Sumário

Solução única

- Para a equação espaço-estado 2 ter uma solução e para a solução ser única, deve-se impor certas restrições à função vetor $\mathbf{F}(\mathbf{x})$.
- Por conveniência de apresentação, desconsiderou-se a dependência do vetor de estados $\mathbf{x}$ no tempo t.
- Para uma solução existir, é suficiente que $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ seja contínua em todos os seus argumentos.
- Entretanto, essa restrição por si só não garante a unicidade da solução.
- Para isso, deve-se impor uma restrição adicional: a *condição de Lipschitz*.
- Seja $\parallel \mathbf{x} \parallel$ a *norma* ou *comprimento euclidiano* do vetor $\mathbf{x}$.
- Sejam $\mathbf{x}$ e $\mathbf{u}$ um par de vetores em um conjunto aberto $\mathcal{M}$ em um espaço vetor (estado) normal.

Solução única

- De acordo com a condição de Lipschitz, existe uma constante K tal que

$$\| \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{u}) \| \leq K \| \mathbf{x} - \mathbf{u} \| \quad (4)$$

para todo $\mathbf{x}$ e $\mathbf{u}$ em $\mathcal{M}$.
- Um vetor função $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ que satisfaz a eq. 4 é chamado de *Lipschitz* e K é chamada de *constante de Lipschitz* para $\mathbf{F}(\mathbf{x})$.
- A eq. 4 também implica a continuidade da função $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ com respeito a $\mathbf{x}$.
- No caso de sistemas autônomos, a condição de Lipschitz garante tanto a existência quanto a unicidade de soluções para a equação espaço-estado 2.
- Em particular, se todas as derivadas parciais $\partial F_i/\partial x_j$ são finitas em todo lugar, então a função $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ satisfaz a condição de Lipschitz.

Sumário

Divergência

- Considere uma região de volume V e superfície S no espaço de estados de um sistema autônomo e assuma um "fluxo" de pontos a partir dessa região.
- O vetor velocidade $d\mathbf{x}(t)/dt$ é igual ao campo vetor $\mathbf{F}(\mathbf{x})$.
- Assumindo que o campo vetor $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ dentro do volume V é "bem comportado", pode-se aplicar o *teorema da divergência* do cálculo de vetores.
- Seja $\mathbf{n}$ um vetor unidade normal à superfície em dS apontando para fora do volume fechado.
- Então, de acordo com o teorema da divergência, a relação

$$\int_S (\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}) dS = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x})) dV \tag{5}$$

é verificada entre a integral do volume da divergência de $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ e a integral da superfície da componente normal direcionado para fora de $\mathbf{F}(\mathbf{x})$.

Divergência

- A quantidade do lado esquerdo da eq. 5 é reconhecido como o *fluxo* da rede fuindo para fora da região limitada pela superfície fechada S.
- Se essa quantidade for zero, o sistema é *conservativo*; se for negativa, o sistema é *dissipativo*.
- À luz da eq. 5, pode-se dizer equivalentemente que se a divergência $\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x})$ (que é escalar) for zero, o sistema é conservativo, e se for negativa o sistema é dissipativo.

Sumário

Estabilidade de estados de equilíbrio

- Considere um sistema dinâmico autônomo descrito pela eq. 2.
- Um vetor constante $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}$ é um *estado de equilíbrio (estacionário)* do sistema se a seguinte condição for satisfeita:
$$\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \tag{6}$$
onde $\mathbf{0}$ é o vetor nulo.
- O vetor velocidade $d\mathbf{x}/dt$ desaparece no estado de equilíbrio $\bar{\mathbf{x}}$, e portanto a função constante $\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}$ é uma solução da eq. 2.
- Ainda, por causa da propriedade da unicidade de soluções, nenhuma outra curva pode passar através do estado de equilíbrio $\bar{\mathbf{x}}$, também referido como *ponto singular*, significando que no caso de um ponto de equilíbrio a trajetória irá se degenerar no próprio ponto.

Estabilidade de estados de equilíbrio

- Para um entendimento mais aprofundado da condição de equilíbrio, suponha que a função não-linear $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ é suave o suficiente para a equação espaço-estado 2 ser linearizada na vizinhança de $\bar{\mathbf{x}}$.
- Especificamente seja

$$\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}} + \Delta\mathbf{x}(t) \tag{7}$$

onde $\Delta\mathbf{x}(t)$ é um desvio pequeno de $\bar{\mathbf{x}}$.
- Então mantendo os primeiros dois termos na expansão da série de Taylor de $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, pode-se aproximá-la como

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \simeq \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\Delta\mathbf{x}(t) \tag{8}$$

- A matriz $\mathbf{A}$ é a *jacobiana* da função não-linear $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, avaliada no ponto $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$, como mostrado por

$$\mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} \tag{9}$$

Estabilidade de estados de equilíbrio

- Substituindo as equações 7 e 8 na 2 e usando a definição de estado de equilíbrio, tem-se

$$\frac{d}{dt}\Delta\mathbf{x}(t) \simeq \mathbf{A}\Delta\mathbf{x}(t) \qquad (10)$$

- Como a jacobiana **A** é não-singular, isto é, a matriz inversa $\mathbf{A}^{-1}$ existe, a aproximação descrita na eq. 10 é suficiente para determinar o comportamento *local* das trajetórias do sistema na vizinhança do estado de equilíbrio $\bar{\mathbf{x}}$.
- Se **A** é não-singular, a natureza do estado de equilíbrio é determinada por seus *auto-valores*.
- Em particular, quando **A** tem *m* auto-valores com partes reais positivas, diz-se que o estado de equilíbrio $\bar{\mathbf{x}}$ é do *tipo m*.

Estabilidade de estados de equilíbrio

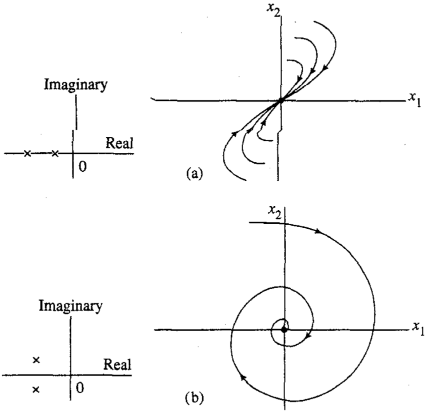
- Para o caso especial de um *sistema de segunda ordem*, pode-se classificar o estado de equilíbrio como na tabela abaixo [2], ilustrado nas figuras 4, 5 e 6.

Tipo de equilíbrio *Estado* $\bar{\mathbf{x}}$	*Auto-valores da matriz jacobiana* $\mathbf{A}$
nó estável	reais e negativos
foco estável	conjugado complexo com partes reais negativas
nó instável	reais e positivos
foco instável	conjugado complexo com partes reais positivas
ponto sela	reais com sinais opostos
centro	conjugado puramente imaginário

- Sem perda de generalidade, assume-se que o estado de equilíbrio é na origem do espaço de estados, isto é, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- Note também que no caso do *ponto sela*, mostrado na figura 6e, as trajetórias indo ao ponto sela são estáveis, enquanto que as trajetórias vindas do ponto sela são instáveis.

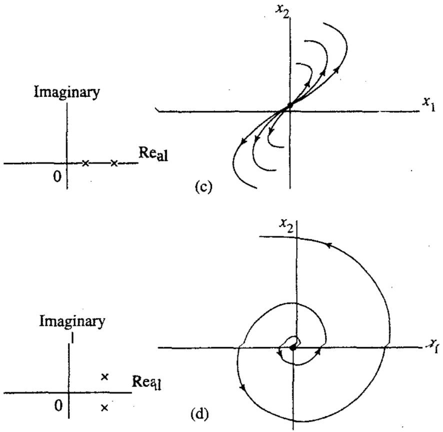
Estabilidade de estados de equilíbrio

Figure 4 : (a) Nó estável; (b) Foco estável [2].



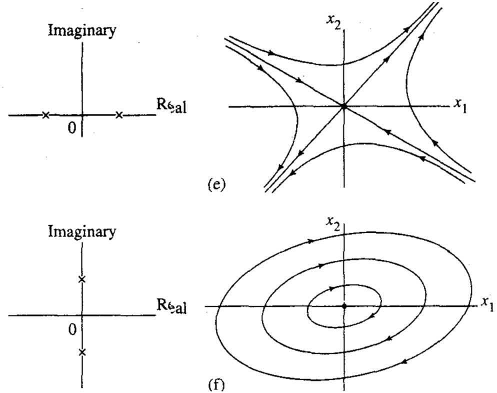
Estabilidade de estados de equilíbrio

Figure 5 : (c) Nó instável; (d) Foco instável [2].



Estabilidade de estados de equilíbrio

Figure 6 : (e) Ponto sela; (f) Centro [2].



Definições de estabilidade

- No contexto de um sistema dinâmico não-linear autônomo com estado de equilíbrio $\bar{\mathbf{x}}$, as definições de estabilidade e convergência são
  1. O estado de equilíbrio $\bar{\mathbf{x}}$ é uniformemente estável se para qualquer positivo ϵ existe um positivo δ tal que a condição

     $$\| \mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{x}} \| < \delta \tag{11}$$

     implica

     $$\| \mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}} \| < \epsilon \tag{12}$$

     para todo $t > 0$.
     Esta definição estabelece que uma trajetória do sistema pode ser feita para ficar dentro de uma vizinhança pequena do estado de equilíbrio $\bar{\mathbf{x}}$ se o estado inicial $\mathbf{x}(0)$ é próximo de $\bar{\mathbf{x}}$.

Definições de estabilidade

- Definições de estabilidade e convergência (cont.)
    2. O estado de equilíbrio $\bar{\mathbf{x}}$ é convergente se existe um positivo δ tal que a condição

$$\| \mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{x}} \| < \delta \qquad (13)$$

implica que

$$\mathbf{x}(t) \to \bar{\mathbf{x}} \;\; quando \;\; t \to \infty \qquad (14)$$

Se o estado inicial $\mathbf{x}(0)$ de uma trajetória é suficientemente próximo do estado de equilíbrio $\bar{\mathbf{x}}$, então a trajetória descrita pelo vetor de estados $\mathbf{x}(t)$ aproximar-se-á de $\bar{\mathbf{x}}$ quando o tempo t se aproximar do infinito.

Definições de estabilidade

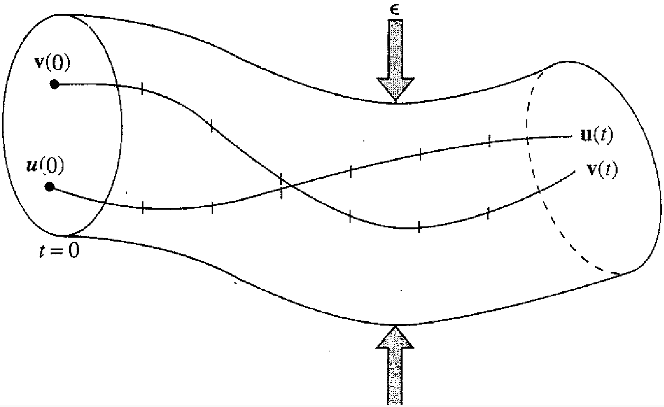
- Definições de estabilidade e convergência (cont.)
    3. O estado de equilíbrio $\bar{\mathbf{x}}$ é assintoticamente estável se for estável e convergente.
       Estabilidade e convergência são propriedades independentes. Apenas quando ambas são satisfeitas, tem-se a estabilidade assintótica.
    4. O estado de equilíbrio $\bar{\mathbf{x}}$ é assintoticamente estável ou globalmente assintoticamente estável se for estável e todas trajetórias do sistema convergem para $\bar{\mathbf{x}}$ quando o tempo t aproxima-se do infinito.
       O sistema não pode ter outros estados de equilíbrio e é necessário que toda trajetória permaneça limitada para todo tempo $t > 0$.

Exemplo

- Seja uma solução $\mathbf{u}(t)$ do sistema dinâmico não-linear descrito pela eq. 2 que varia com o tempo t como indicado na figura 7.
- Para a solução $\mathbf{u}(t)$ ser uniformemente estável, é necessário que $\mathbf{u}(t)$ e qualquer outra solução $\mathbf{v}(t)$ fiquem próximas para os mesmos valores de t.
- Esse tipo de comportamento é conhecido como *correspondência isócrona* das duas soluções $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$.
- A solução $\mathbf{u}(t)$ é convergente pois para toda outra solução $\mathbf{v}(t)$ para a qual $\| \mathbf{v}(0) - \mathbf{u}(0) \| \leq \delta(\epsilon)$ no tempo $t = 0$, as soluções $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{u}(t)$ convergem para um estado de equilíbrio quando t se aproxima do infinito.

Exemplo

Figure 7 : Noção de estabilidade (convergência) uniforme de um vetor de estados [2].



Teoremas de Lyapunov

- Os teoremas de Lyapunov sobre a estabilidade e a estabilidade assintótica da equação de espaço-estado (eq. 2) descrevendo um sistema dinâmico não-linear autônomo com vetor de estados $\mathbf{x}(t)$ e estado de equilíbrio $\bar{\mathbf{x}}$ são dois:
  1. O estado de equilíbrio $\bar{\mathbf{x}}$ é estável se em uma vizinhança pequena de $\bar{\mathbf{x}}$ existe uma função definida positiva $V(\mathbf{x})$ tal que sua derivada com respeito ao tempo seja semidefinida negativa nessa região.
  2. O estado de equilíbrio $\bar{\mathbf{x}}$ é assintoticamente estável se em uma vizinhança pequena de $\bar{\mathbf{x}}$ existe uma função definida positiva $V(\mathbf{x})$ tal que sua derivada com respeito ao tempo seja definida negativa nessa região.
- Uma função escalar $V(\mathbf{x})$ que satisfaz esses requisitos é chamada de *função de Lyapunov* para o estado de equilíbrio $\bar{\mathbf{x}}$.

Teoremas de Lyapunov

- Esses teoremas requerem que $V(\mathbf{x})$ seja uma função definida positiva.
- Uma função $V(\mathbf{x})$ é *definida positiva* no estado de espaço $\mathscr{L}$ se, para todo $\mathbf{x}$ em $\mathscr{L}$, satisfaça:
  1. A função $V(\mathbf{x})$ tem derivadas parciais contínuas com respeito aos elementos do vetor de estados $\mathbf{x}$.
  2. $V(\bar{\mathbf{x}}) = 0$.
  3. $V(\mathbf{x}) > 0$ se $\mathbf{x} \neq \bar{\mathbf{x}}$.
- Dado que $V(\mathbf{x})$ é uma função de Lyapunov, de acordo com o teorema 1 o estado de equilíbrio $\bar{\mathbf{x}}$ é estável se

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \mathit{para}\ \mathbf{x} \in \mathscr{U} - \bar{\mathbf{x}} \tag{15}$$

onde $\mathscr{U}$ é uma pequena vizinhança ao redor de $\bar{\mathbf{x}}$.

Teoremas de Lyapunov

- Além disso, de acordo com o teorema 2, o estado de equilíbrio $\bar{\mathbf{x}}$ é assintoticamente estável se

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{x}) < 0 \quad \textit{para}\ \mathbf{x} \in \mathscr{U} - \bar{\mathbf{x}} \tag{16}$$

- Os teoremas de Lyapunov podem ser aplicados sem ter que resolver a equação espaço-estado do sistema.
- Infelizmente, os teoremas não indicam como achar uma função de Lyapunov.
- Em muitos casos, a função energia pode servir.
- A inabilidade de achar uma função de Lyapunov adequada não prova a instabilidade do sistema.
- A existência de tal função é suficiente mas não necessária para a estabilidade.

Sumário

Atratores

- Sistemas dissipativos são geralmente caracterizados pela presença de conjuntos de atração ou *manifolds* de dimensionalidade mais baixa que a do estado de espaços.
- Por *manifold* entende-se uma superfície k-dimensional embutida num espaço de estados N-dimensional, definido por um conjunto de equações:

$$M_j(x_1, x_2, \ldots, x_N) = 0, \quad \begin{cases} j = 1, 2, \ldots, k \\ k < N \end{cases} \tag{17}$$

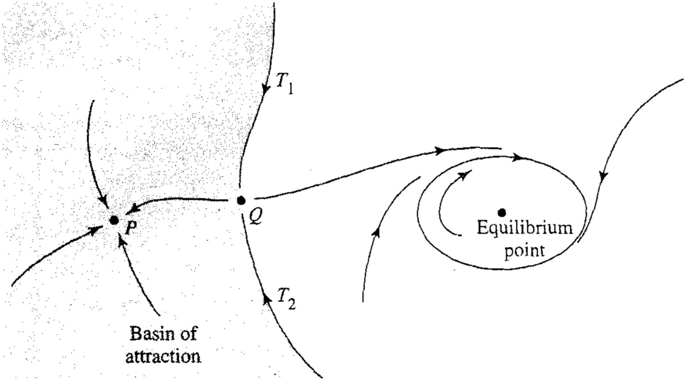
  onde x_1, x_2, ..., x_N são elementos do vetor de estados N-dimensional do sistema, e M_j é alguma função desses elementos.
- Esses *manifolds* são chamados de **atratores**, pois eles são subconjuntos limitados para os quais regiões de condições iniciais de volume de espaço de estados não-zero convergem quando o tempo t aumenta.

Atratores

- O *manifold* pode consistir de um único ponto no espaço de estados, neste caso um *atrator de ponto*.
- Alternativamente, pode ser na forma de uma órbita periódica, nesse caso um *ciclo limite* estável, no sentido de que trajetórias próximas se aproximam dele assintoticamente.
- A figura 8 ilustra esses dois tipos de atratores.
- Os atratores representam os únicos *estados de equilíbrio* de um sistema dinâmico que podem ser *observados experimentalmente*.
- No contexto dos atratores, um estado de equilíbrio *não* implica um equilíbrio estático nem um estado estável.
- O ciclo limite representa um estado estável de um atrator, mas que varia continuamente com o tempo.

Atratores

Figure 8 : Ilustração da noção de uma bacia de atração e a ideia da separatriz [2].



Atratores

- Na figura 8 nota-se que cada atrator é envolvido por uma própria região distinta.
- Tal região é chamada de *bacia (domínio) de atração*.
- Note também que todo estado inicial do sistema está na bacia de algum atrator.
- A fronteira que separa uma bacia de atração de outra é chamada de *separatriz*.
- No caso da figura 8 a fronteira da bacia é representada pela união da trajetória T_1, o ponto sela Q e a trajetória T_2.

Atratores

- Um ciclo limite constitui a forma típica de um comportamento oscilatório que aparece quando um ponto de equilíbrio de um sistema não-linear se torna instável.
- Como tal, pode aparecer em sistemas não-lineares de qualquer ordem.
- Contudo, ciclos limite são particularmente característicos de sistemas de segunda ordem.

Atratores Hiperbólicos

- Considere um atrator ponto cujas equações dinâmicas não-lineares são linearizadas em volta do estado de equilíbrio $\bar{\mathbf{x}}$ na maneira descrita na seção 6.
- Seja **A** a matriz jacobiana do sistema avaliada em $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$.
- O atrator é chamado de *atrator hiperbólico* se todos os auto-valores da matriz jacobiana **A** têm um valor absoluto menor que 1.
- Por exemplo, o fluxo de um atrator hiperbólico de segunda ordem pode ter a forma mostrada na figura 4a ou 4b; em ambos os casos os auto-valores de **A** têm partes reais negativas.
- Atratores hiperbólicos são de particular interesse no estudo de um problema conhecido como o problema dos gradientes que desaparecem que acontece em redes recorrentes dirigidas dinamicamente.

Sumário

Modelos de Neurodinâmica

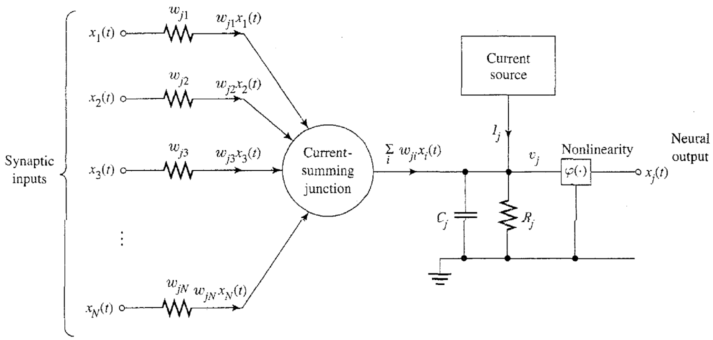
- Os sistemas de interesse possuem quatro características:
  1. *Um grande número de graus de liberdade*. O córtex humano é um sistema distribuído e altamente paralelo com 100 bilhões de neurônios, com cada neurônio modelado por uma ou mais variáveis de estado. Acredita-se que tanto a potência computacional quanto a capacidade de tolerância a falhas de um sistema neurodinâmico são o resultado da dinâmica coletiva do sistema. O sistema é caracterizado por um número muito grande de constantes de acoplamento representados pelas forças (eficácias) de junções sinápticas individuais.
  2. *Não-linearidade*. Essencial para criar uma máquina de computação universal.
  3. *Dissipação*. Caracterizado pela convergência do volume espaço-estado para um *manifold* de dimensionalidade mais baixa ao passar do tempo.
  4. *Ruído*. Característica intrínsica. Em neurônios reais, ruído na membrana é gerado nas junções sinápticas.

Modelo aditivo

- Considere o modelo dinâmico sem ruído de um neurônio mostrado na figura 9.
- Em termos físicos, os pesos sinápticos w_{j1}, w_{j2}, ..., w_{jN} representam *condutâncias* e as N entradas respectivas $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_N(t)$ representam *potenciais*.
- Essas entradas são aplicadas a uma *junção somadora de corrente* caracterizada como:
  - Baixa resistência de entrada
  - Unidade de ganho de corrente
  - Alta resistência de saída
- Esse modelo pode ser visto como aproximação do circuito de modelo de linha de transmissão distribuída de um neurônio dendrítico biológico.
- A natureza “passa-baixa” do circuito RC pode ser justificado pelo fato de que uma sinapse biológica **é** um filtro passa-baixa.

Modelo aditivo

Figure 9 : Modelo aditivo de um neurônio [2].



Modelo aditivo

- A junção somadora age como um nó somatório para as correntes de entrada.
- A corrente total que flui *em direção* ao nó de entrada do elemento não-linear (função de ativação) é

$$\sum_{i=1}^{N} w_{ji} x_i(t) + I_j \tag{18}$$

onde o primeiro termo da soma é devido ao estímulo $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_N(t)$ que agem nos pesos sinápticos (condutâncias) w_{j1}, w_{j2}, ..., w_{jN}, respectivamente, e o segundo termo é devido à fonte de corrente I_j representando um *bias* aplicado externamente.

Modelo aditivo

- Seja $v_j(t)$ o campo local induzido na entrada de uma função de ativação não-linear $\varphi(\cdot)$.
- Expressa-se a corrente total que flui *para fora* do nó de entrada do elemento não-linear:

$$\frac{v_j(t)}{R_j} + C_j \frac{dv_j(t)}{dt} \tag{19}$$

onde o primeiro termo é devido à resistência de vazamento R_j e o segundo à capacitância de vazamento C_j.
- Da lei de Kirchoff, sabe-se que a corrente total que flui na direção de um nó de um circuito elétrico é zero:

$$C_j \frac{dv_j(t)}{dt} + \frac{v_j(t)}{R_j} = \sum_{i=1}^{N} w_{ji} x_i(t) + I_j \tag{20}$$

Modelo aditivo

- O termo capacitivo $C_j{}^{dv_j(t)}/_{dt}$ da eq. 20 é a forma mais simples de adicionar dinâmica (memória) ao modelo de um neurônio.
- Dado o campo local induzido $v_j(t)$, pode-se determinar a saída do neurônio j usando a relação não-linear

$$x_j(t) = \varphi(v_j(t)) \tag{21}$$

- O modelo RC descrito na eq. 20 é chamado de *modelo aditivo* para diferenciar de modelos multiplicativos onde w_{ji} é dependente de x_i.
- *Neurodinâmica clássica*: $x_i(t)$ aplicado ao neurônio j pelo neurônio adjacente i é uma função que varia lentamente no tempo t.

Modelo aditivo

- Agora, considere uma *rede recorrente* consistindo de uma interconexão de N neurônios, onde cada um tem o mesmo modelo matemático das equações 20 e 21.
- Ignorando os atrasos de tempo de propagação interneurônios, define-se a dinâmica da rede pelo seguinte *sistema de equações diferenciais de primeira-ordem acopladas*:

$$C_j \frac{dv_j(t)}{dt} = -\frac{v_j(t)}{R_j} + \sum_{i=1}^{N} w_{ji} x_i(t) + I_j, \quad j = 1, 2, ..., N \quad (22)$$

- Assume-se que $\varphi(\cdot)$ é uma função contínua e portanto diferenciável. Função logística (mais comum):

$$\varphi(v_j) = \frac{1}{1 + exp(-v_j)}, \quad j = 1, 2, ..., N \quad (23)$$

Modelo relacionado

- Para simplificar, assume-se que a constante de tempo $\tau_j = R_j C_j$ do neurônio j na eq. 22 é a mesma para todo j.
- Então, normalizando o tempo t com respeito ao valor comum desta constante de tempo e w_{ji} e I_j com respeito a R_j, pode-se re-escrever o modelo da eq. 22 como:

$$\frac{dv_j(t)}{dt} = -v_j(t) + \sum_i w_{ji}\varphi(v_i(t)) + I_j, \quad j = 1, 2, , , , N \quad (24)$$

onde incorporou-se também e eq. 21.

- A estrutura do atrator do sistema de equações diferenciais não-lineares de primeira ordem acopladas (eq. 24) é basicamente a mesma do modelo relacionado:

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = -x_j(t) + \varphi(\sum_i w_{ji}x_i(t)) + K_j, \quad j = 1, 2, , , , N \quad (25)$$

Modelo relacionado

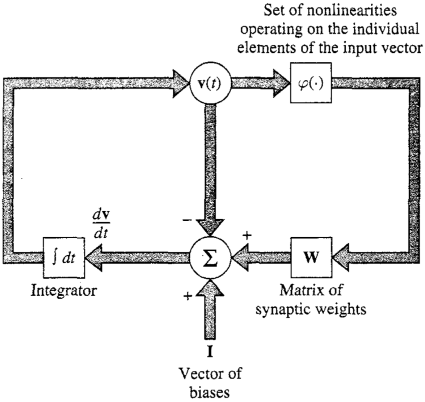
- No modelo aditivo descrito pela eq. 24, os campos locais induzidos $v_1(t), v_2(t), \ldots, v_N(t)$ dos neurônios individuais constituem o vetor de estados.
- Por outro lado, no modelo relacionado da eq. 25, as saídas dos neurônios $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t)$ constituem o vetor de estados.
- Esses dois modelos neurodinâmicos são relacionados entre si por uma transformação inversiva linear.
- Multiplicando ambos os lados da eq. 25 por w_{kj}, somando com respeito a j e então substituindo a transformação $v_k(t) = \sum_j w_{kj} x_j(t)$, obtém-se um modelo do tipo descrito pela eq. 24, sendo que os termos de *bias* dos dois modelos são relacionados por $I_k = \sum_j w_{kj} K_j$.
- Os resultados a respeito da estabilidade do modelo aditivo da eq. 24 são aplicáveis ao modelo relacionado da eq. 25.

Modelo relacionado

- O relacionamento entre os dois modelos neurodinâmicos também é ilustrado pelos diagramas de blocos das figuras 10 e 11, que correspondem às formulações de matriz das eqs. 24 e 25, respectivamente.
- $\mathbf{W}$ é a matriz de pesos sinápticos, $\mathbf{v}(t)$ é o vetor de campos locais induzidos no tempo t, e $\mathbf{x}(t)$ é o vetor de saídas neuronais no tempo t.
- A presença de retro-alimentação em ambos os modelos é claramente visível.

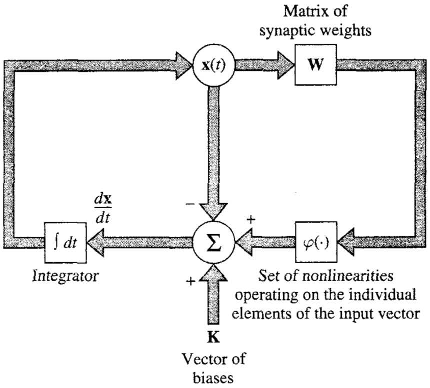
Modelo relacionado

Figure 10 : Diagrama de blocos de um sistema neurodinâmico representado por equações diferenciais de primeira ordem acopladas (eq. 24) [2].



Modelo relacionado

Figure 11 : Diagrama de blocos do modelo relacionado descrito pela eq. 25 [2].



Sumário

Manipulação de atratores como redes recorrentes

- Quando o número de neurônios, N, é muito grande, o modelo neurodinâmico descrito pela eq. 22 possui, exceto pelo efeito de ruído, as propriedades gerais dos Modelos de Neurodinâmica:
  - muitos graus de liberdade,
  - não-linearidade,
  - dissipação.
- Dessa forma, tal modelo neurodinâmico pode ter estruturas atratoras complicadas e portanto exibir capacidades computacionais úteis.
- A identificação de atratores com objetos computacionais (por exemplo, memórias associativas, mapeadores entrada-saída) é um dos fundamentos do paradigma de redes neurais.
- Para implementar essa ideia, deve-se exercitar o *controle* sobre as posições dos atratores no espaço de estados do sistema.

Manipulação de atratores como redes recorrentes

- Um algoritmo de aprendizado toma a forma de uma equação dinâmica não-linear que manipula as posições dos atratores para o propósito de codificar informação na forma desejada, ou aprender estruturas temporais de interesse.
- Desta forma, é possível estabelecer um relacionamento íntimo entre a física da máquina e os algoritmos da computação.
- Uma forma na qual as propriedades coletivas de uma rede neural podem ser usadas para implementar uma tarefa computacional é pelo conceito da *minimização da energia*.
- A rede de Hopfield é um exemplo de tal abordagem, pois trata-se de uma rede de minimização de energia.
- A rede de Hopfield é útil como uma memória endereçável pelo conteúdo ou um computador analógico para resolver problemas de otimização do tipo combinatorial.

Manipulação de atratores como redes recorrentes

- A rede de Hopfield é um exemplo de memória associativa sem neurônios escondidos.
- Uma memória associativa é um recurso importante para comportamento inteligente.
- Um outro modelo neurodinâmico é o mapeador entrada-saída, cuja operação depende da disponibilidade de neurônios escondidos.
- O método do *steepest descent* (gradiente descendente) é usado para minimizar uma função custo definida em termos dos parâmetros da rede e portanto mudar as posições dos atratores.
- Essa aplicação é exemplificada pelas redes recorrentes dirigidas dinamicamente.

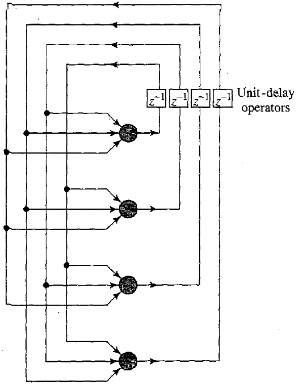
Sumário

Rede de Hopfield

- A *rede* (ou *modelo*) *de Hopfield* consiste de um conjunto de neurônios e um conjunto correspondente de unidades de atraso, formando um *sistema de retro-alimentação (feedback) de loops múltiplos*, como ilustrado na figura 12.
- O número de *loops* de *feedback* é igual ao número de neurônios.
- Basicamente, a saída de cada neurônio é retro-alimentada, via unidade de atraso, a cada um dos outros neurônios da rede.
- Ou seja, não há auto-retro-alimentação.

Rede de Hopfield

Figure 12 : Grafo arquitetural de uma rede de Hopfield com $N = 4$ neurônios [2].



Rede de Hopfield

- Reconhecendo que $x_i(t) = \varphi_i(v_i(t))$, pode-se re-escrever a eq. 22 como

$$C_j \frac{d}{dt} v_j(t) = -\frac{v_j(t)}{R_j} + \sum_{i=1}^{N} w_{ji}\varphi_i(v_i(t)) + I_j, \quad j = 1, ..., N \quad (26)$$

- Faz-se as seguintes assunções:
  1. A matriz de pesos sinápticos é *simétrica*:

$$w_{ji} = w_{ij} \quad para\ todo\ i\ e\ j \quad (27)$$

  2. Cada neurônio tem sua própria ativação *não-linear* - daí o uso de $\varphi(\cdot)$ na eq. 26.
  3. A *inversa* da função de ativação não-linear existe, portanto pode-se escrever:

$$v = \varphi_i^{-1}(x) \quad (28)$$

Ganho

- Seja a função sigmoide $\varphi_i(v)$ definida pela tangente hiperbólica:

$$x = \varphi_i(v) = \tanh\left(\frac{a_i v}{2}\right) = \frac{1 - exp(-a_i v)}{1 + exp(-a_i v)} \tag{29}$$

que tem uma inclinação de $a_i/2$ na origem:

$$\frac{a_i}{2} = \left.\frac{d\varphi_i}{dv}\right|_{v=0} \tag{30}$$

Refere-se a a_i como o *ganho* do neurônio i.

- A relação inversa saída-entrada da eq. 28 pode ser re-escrita como

$$v = \varphi_i^{-1}(x) = -\frac{1}{a_i}\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \tag{31}$$

Função energia (de Lyapunov)

- A forma *padrão* da relação inversa saída-entrada para um neurônio de ganho unitário

$$\varphi^{-1}(x) = -\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \tag{32}$$

- Pode-se re-escrever a eq. 31 em termos dessa relação padrão

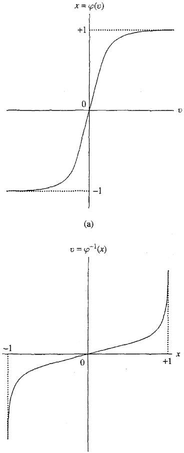
$$\varphi_i^{-1}(x) = \frac{1}{a_i}\varphi^{-1}(x) \tag{33}$$

- A figura 13 mostra a não-linearidade sigmoidal padrão $\varphi(v)$ (a) e sua inversa $\varphi^{-1}(x)$ (b).
- A função energia (de Lyapunov) da rede de Hopfield da figura 12 é

$$E = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_{ji}x_i x_j + \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{R_j}\int_0^{x_j}\varphi_j^{-1}(x)dx - \sum_{j=1}^{N} I_j x_j \tag{34}$$

Função energia (de Lyapunov)

Figure 13 : (a) Não-linearidade sigmoidal padrão e (b) sua inversa [2].



Função energia (de Lyapunov)

- A função energia E da eq. 34 pode ter um *cenário* complicado com muitos mínimos.
- A dinâmica da rede é descrita por um mecanismo que procura evitar esses mínimos.
- Então, diferenciando E com respeito ao tempo

$$\frac{dE}{dt} = -\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{N} w_{ji}x_i - \frac{v_j}{R_j} + I_j\right)\frac{dx_j}{dt} \tag{35}$$

- Por causa da eq. 26, a quantidade dentro dos parênteses da eq. 35 é reconhecida como $C_j {}^{dv_j}/_{dt}$. Simplificando

$$\frac{dE}{dt} = -\sum_{j=1}^{N} C_j\left(\frac{dv_j}{dt}\right)\frac{dx_j}{dt} \tag{36}$$

Função energia (de Lyapunov)

- Reconhece-se agora a relação inversa que define v_j em termos de x_j.
- O uso da eq. 28 em 36

$$\frac{dE}{dt} = -\sum_{j=1}^{N} C_j \left[\frac{d}{dt}\varphi_j^{-1}(x_j)\right]\frac{dx_j}{dt} = -\sum_{j=1}^{N} C_j \left(\frac{dx_j}{dt}\right)^2 \left[\frac{d}{dx_j}\varphi_j^{-1}(x_j)\right] \tag{37}$$

- Da figura 13b vê-se que a relação saída-entrada inversa $\varphi_j^{-1}(x_j)$ é uma função monotônica crescente da saída x_j. Portanto segue que

$$\frac{d}{dx_j}\varphi_j^{-1}(x_j) \geq 0 \;\; \textit{para todo } x_j \tag{38}$$

Função energia (de Lyapunov)

- Nota-se também que

$$\left(\frac{dx_j}{dt}\right)^2 \geq 0 \;\; para\ todo\ x_j \qquad (39)$$

- Assim, todos os fatores que fazem a soma do lado direito da eq. 37 são não negativos.
- Em outras palavras, para a função energia E definida na eq. 34 tem-se

$$\frac{dE}{dt} \leq 0 \qquad (40)$$

- Da definição da eq. 34, nota-se que a função E é limitada:
  1. A função energia E é uma função de Lyapunov do modelo de Hopfield contínuo.
  2. O modelo é estável de acordo com o teorema 1 de Lyapunov.

Espaço de estados

- Em outras palavras, a evolução do tempo do modelo de Hopfield contínuo descrito pelo sistema de equações diferenciais de primeira ordem não-lineares (26) representa uma trajetória no espaço de estados, que busca os mínimos da função energia (de Lyapunov) E e para em tais pontos fixos.
- Da eq. 37 nota-se também que a derivada ${}^{dE}/_{dt}$ desaparece apenas se

$$\frac{d}{dt}x_j(t) = 0 \quad \textit{para todo } j \tag{41}$$

- Pode-se escrever

$$\frac{dE}{dt} < 0 \quad \textit{exceto em um ponto fixo} \tag{42}$$

Função energia (de Lyapunov)

- A eq. 42 provê a base para o seguinte teorema:

Theorem

A função energia (de Lyapunov) E de uma rede de Hopfield é uma função do tempo monotonicamente decrescente.

- A rede de Hopfield é globalmente assintoticamente estável.

Sumário

Hopfield discreto e contínuo

- A rede de Hopfield pode ser operada no modo contínuo ou discreto.
- O modo contínuo é baseado no modelo aditivo.
- O modo discreto é baseado no modelo de McCulloch-Pitts.
- Pode-se estabelecer um relacionamento entre os estados estáveis do modelo contínuo com aqueles do modelo discreto redefinindo a relação entrada-saída para um neurônio, satisfazendo duas características de simplificação:
  1. A saída de um neurônio tem os valores assintóticos:
  $$x_j = \begin{cases} +1 & para\ v_j = \infty \\ -1 & para\ v_j = -\infty \end{cases}$$
  2. O ponto médio da função de ativação de um neurônio fica na origem:
  $$\varphi_j(0) = 0 \tag{43}$$
- Da mesma forma, pode-se fazer o *bias* $I_j = 0$ para todo j.

Hopfield discreto e contínuo

- Na formulação da função energia E para um modelo de Hopfield contínuo, os neurônios podem ter auto-*loops*.
- Um modelo discreto não precisa de auto-*loops*.
- Para simplificar: $w_{jj} = 0$ para todo j em ambos modelos.
- Assim, pode-se redefinir a função energia de um modelo de Hopfield contínuo dado na eq. 34 como:

$$E = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1, i\neq j}^{N} w_{ji}x_i x_j + \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{R_j}\int_0^{x_j}\varphi_j^{-1}(x)dx \qquad (44)$$

- A função inversa $\varphi_j^{-1}(x)$ é definida pela eq. 33. Re-escrevendo a eq. 44:

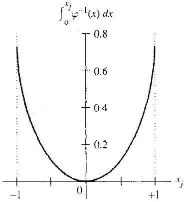
$$E = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1, i\neq j}^{N} w_{ji}x_i x_j + \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{a_j R_j}\int_0^{x_j}\varphi^{-1}(x)dx \qquad (45)$$

Hopfield discreto e contínuo

- A integral

$$\int_0^{x_j} \varphi^{-1}(x)dx \tag{46}$$

tem a forma padrão plotada na figura abaixo [2].



- Se o ganho a_j do neurônio j torna-se infinitamente grande, ou seja, a não-linearidade sigmoidal aproxima-se da forma linear (*hard limiter*), o segundo termo da eq. 45 torna-se muito pequeno.

Hopfield discreto e contínuo

- No caso limite ($a_j = \infty$ para todo j) os máximos e mínimos do modelo de Hopfield contínuo tornam-se idênticos aos do modelo discreto.
- Nesse caso, a função energia (de Lyapunov) é definida simplesmente por

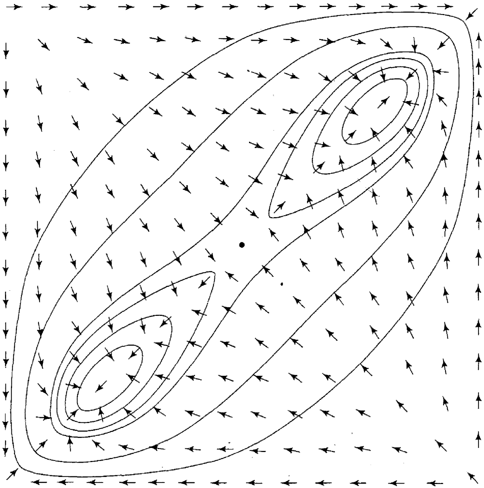
$$E = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, i \neq j}^{N} w_{ji} x_i x_j \tag{47}$$

  onde o j-ésimo estado do neurônio $x_j = \pm 1$.
- Conclui-se que os únicos pontos estáveis do modelo de Hopfield determinístico, contínuo e de ganho muito alto correspondem aos pontos estáveis do modelo de Hopfield estocástico discreto.

Hopfield discreto e contínuo

- Quando cada neurônio j tem um ganho a_j grande porém finito, o segundo termo da eq. 45 torna-se uma contribuição importante à função energia do modelo contínuo.
- A contribuição é grande e positiva perto das superfícies, bordas e cantos do hipercubo unitário que define o espaço de estados do modelo.
- Por outro lado, a contribuição é desprezível nos pontos longes da superfície.
- A função energia tem seus máximos nos cantos mas os mínimos estão no interior do hipercubo.
- A figura 82 mostra o *mapa de contorno da energia* para um modelo de Hopfield contínuo com dois neurônios.

Hopfield discreto e contínuo [2]



Hopfield discreto e contínuo

- Na figura 82, as saídas dos dois neurônios definem as duas coordenadas do mapa.
- Os cantos inferior esquerdo e superior direito representam mínimos estáveis para o caso limite de ganho infinito.
- Estados instáveis estão nos outros dois cantops.
- As setas mostram o movimento do estado, que geralmente não é perpendicular aos contornos de energia.
- O fluxo para os pontos fixos (isto é, mínimos estáveis) podem ser interpretados como solução à minimização da função energia E definida na eq. 34.

Sumário

Hopfield como Memória associativa

- Rede de Hopfield como *memória endereçável pelo conteúdo* (MEC).
- Nessa aplicação, conhece-se os pontos fixos da rede *a priori* pois correspondem aos padrões a serem armazenados.
- Entretanto, os pesos sinápticos da rede que produzem os pontos fixos desejados são desconhecidos.
- O problema é determiná-los.
- A função básica de uma memória endereçável pelo conteúdo é recuperar um padrão armazenado na memória, em resposta à apresentação da versão incompleta ou com ruídos desse padrão.

Hopfield como Memória associativa

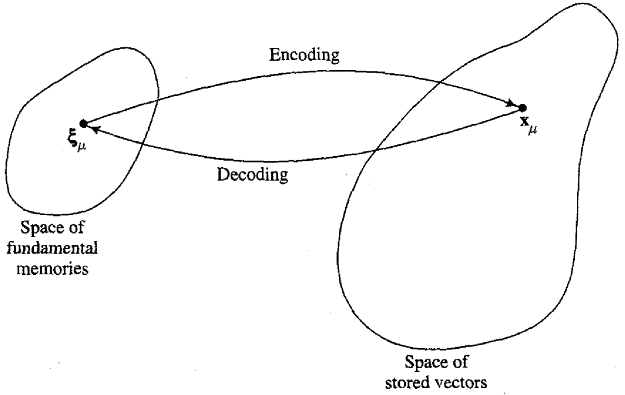
Suponha que um item armazenado na memória seja "H.A. Kramers & G.H. Wannier Physi Rev. 60, 252 (1941)." Uma memória endereçável pelo conteúdo geral seria capaz de recuperar esse item inteiro da memória baseado em informação parcial suficiente. A entrada "& G.H. Wannier (1941)" pode ser suficiente. Uma memória ideal poderia tratar erros e recuperar essa referência mesmo a partir da entrada "Wannier, (1941)." [3]

- A essência da MEC é mapear uma memória fundamental ξ_μ em um ponto fixo (estável) $\mathbf{x}_\mu$ de um sistema dinâmico, como ilustrado na figura 14.
- Matematicamente:

$$\xi_\mu \rightleftharpoons \mathbf{x}_\mu \tag{48}$$

Hopfield como Memória associativa

Figure 14 : Codificação-decodificação realizado por uma rede recorrente [2].



Hopfield como Memória associativa

- Com o modelo de Hopfield usando o neurônio formal de McCulloch-Pitts, cada neurônio tem dois estados determinados pelo nível do campo local induzido que age no mesmo ($x_i = +1$ ou $x_i = -1$).
- Para uma rede com N neurônios, o *estado* da rede é definido pelo vetor

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_N]^T \tag{49}$$

- Com $x_i = \pm 1$, o estado do neurônio i representa um *bit* de informação.
- O campo local induzido v_j do neurônio j é definido por

$$v_j = \sum_{i=1}^{N} w_{ji} x_i + b_j \tag{50}$$

onde b_j é um *bias* fixo aplicado externamente ao neurônio j.

Hopfield como Memória associativa

- Assim, o neurônio *j* modifica seu estado x_j de acordo com a *regra determinística*

$$x_j = \begin{cases} +1 & se\ v_j > 0 \\ -1 & se\ v_j < 0 \end{cases}$$

  re-escrita na forma compacta $x_j = sgn[v_j]$, onde *sgn* é a função *signum*.
- Se $v_j = 0$ assume-se que o neurônio *j* permanece no estado anterior.
- Duas fases na operação da rede de Hopfield discreta como uma MEC: a fase de armazenamento e a fase de recuperação.

Armazenamento

1. *Fase de armazenamento*:
   - Deseja-se armazenar um conjunto de M vetores N-dimensionais (palavras binárias), denotados por $\{\xi_\mu | \mu = 1, 2, ..., M\}$.
   - Esses vetores, chamados de *memórias fundamentais*, representam os padrões a serem memorizados pela rede.
   - Seja $\xi_{\mu,i}$ o i-ésimo elemento da memória fundamental ξ_μ, classe $\mu = 1, 2, ..., M$.
   - De acordo com a *regra do produto externo* (generalização do *postulado de aprendizado de Hebb*), o peso sináptico do neurônio i para o j é definido por

$$w_{ji} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{M} \xi_{\mu,j} \xi_{\mu,i} \tag{51}$$

   A razão para usar $1/N$ como constante de proporcionalidade é simplificar a descrição matemática da recuperação da informação.

Armazenamento

1. *Fase de armazenamento* (cont.):
   - A regra de aprendizado da eq. 51 é uma computação "única".
   - Na operação normal da rede de Hopfield, faz-se

     $$w_{ii} = 0 \quad \textit{para todo } i \tag{52}$$

     que significa que os neurônios não têm auto-retro-alimentação.
   - Seja **W** a matriz de pesos sinápticos N-por-N da rede.
   - Pode-se combinar as equações 51 e 52 na forma matriz:

     $$\mathbf{W} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{M} \xi_\mu \xi_\mu^T - M\mathbf{I} \tag{53}$$

     onde $\xi_\mu \xi_\mu^T$ representa o produto externo do vetor ξ_μ com ele mesmo e **I** denota a matriz identidade.

Armazenamento

1 *Fase de armazenamento* (cont.):
- A partir dessas equações de definição dos pesos sinápticos/matriz de pesos, pode-se reconfirmar o seguinte:
  - A saída de cada neurônio na rede é retro-alimentado a todos os outros neurônios.
  - Não há auto-retro-alimentação na rede (isto é, $w_{ii} = 0$).
  - A matriz de pesos da rede é simétrica, como mostrado por (veja eq. 27):

$$\mathbf{W}^T = \mathbf{W} \tag{54}$$

Recuperação

2 *Fase de recuperação*:
- Durante a fase de recuperação, um vetor N-dimensional ξ_{sonda}, é imposto à rede de Hopfield como seu estado.
- O vetor sonda tem elementos iguais a ± 1.
- Representa uma versão incompleta ou ruidosa de uma memória fundamental da rede.
- A recuperação da informação acontece de acordo com uma *regra dinâmica* na qual cada neurônio j da rede *aleatoriamente*, mas numa taxa fixa, examina o campo local induzido v_j (incluindo qualquer *bias* b_j não nulo) aplicado a ele.
- Se, em algum instante de tempo, v_j é maior que zero, o neurônio j mudará seu estado para +1 ou permanecerá em seu estado, caso já esteja em +1.
- Se v_j é menor que zero, j mudará seu estado para -1 ou permanecerá em seu estado, caso já esteja em -1.
- Se $v_j = 0$, j permanecerá em seu estado anterior.

Condição de estabilidade

2 *Fase de recuperação* (cont.):
- A atualização de estados é portanto determinística, mas a seleção de um neurônio para realizar a atualização é aleatória.
- O procedimento de atualização *assíncrono* (serial) continua até que não haja mais mudanças.
- Ou seja, começando pelo vetor sonda **x**, a rede produz um vetor de estados invariante no tempo **y** cujos elementos individuais satisfazem a *condição de estabilidade* ou *condição de alinhamento*:

$$y_i = sgn\left(\sum_{i=1}^{N} w_{ji} y_i + b_j\right), \quad j = 1, 2, ..., N \tag{55}$$

ou, na forma matricial,

$$\mathbf{y} = sgn(\mathbf{W}\mathbf{y} + \mathbf{b}) \tag{56}$$

onde **W** é a matriz de pesos sinápticos da rede e **b** é o *vetor bias* aplicado externamente.

Condição de estabilidade

2 *Fase de recuperação* (cont.):
- O vetor de estados **y** que satisfaz a condição de estabilidade é chamado de *estado estável* ou *ponto fixo* do espaço de estados do sistema.
- Pode-se afirmar que a rede de Hopfield sempre convergirá para um estado estável, quando a operação de recuperação for realizada *assincronamente*.

Sumário

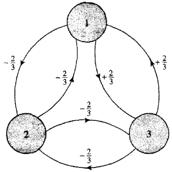
Exemplo [2]

- Para ilustrar o comportamento emergente do modelo de Hopfield, considere a rede da figura 98a, que consiste de três neurônios.
- A matriz de pesos da rede é

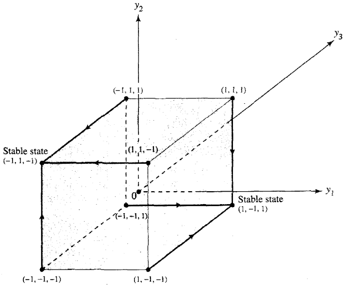
$$\mathbf{W} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & -2 & +2 \\ -2 & 0 & -2 \\ +2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \tag{57}$$

  que é legítima, pois satisfaz as condições das equações 52 e 54.
- O *bias* aplicado a cada neurônio é zero.
- Com três neurônios, há $2^3 = 8$ possíveis estados.
- Desses estados, apenas (1,-1,1) e (-1,1,-1) são estados estáveis, pois satisfazem a condição de alinhamento da eq. 56.

Exemplo [2]


1
2
3
$-\frac{2}{3}$
$-\frac{2}{3}$
$+\frac{2}{3}$
$+\frac{2}{3}$
$-\frac{2}{3}$
$-\frac{2}{3}$

(a)


y_2
y_3
y_1
(−1, 1, 1)
(1, 1, 1)
(1, 1, −1)
Stable state
(−1, 1, −1)
0
(−1, −1, 1)
Stable state
(1, −1, 1)
(−1, −1, −1)
(1, −1, −1)

Exemplo [2]

- Para o vetor de estados (1, -1, 1) tem-se

$$\mathbf{Wy} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & -2 & +2 \\ -2 & 0 & -2 \\ +2 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} +1 \\ -1 \\ +1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} +4 \\ -4 \\ +4 \end{bmatrix} \quad (58)$$

- Aplicando o *hard limiter*:

$$sgn[\mathbf{Wy}] = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \\ +1 \end{bmatrix} = \mathbf{y} \quad (59)$$

- Similarmente, para o vetor de estados (-1,1,-1):

$$\mathbf{Wy} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & -2 & +2 \\ -2 & 0 & -2 \\ +2 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -4 \\ +4 \\ -4 \end{bmatrix} \quad (60)$$

- Aplicando o *hard limiter*:

$$sgn[\mathbf{Wy}] = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \end{bmatrix} = \mathbf{y} \quad (61)$$

Exemplo [2]

- O mapa do fluxo da figura 98b exibe simetria com respeito aos dois estados estáveis da rede, que é o resultado de deixar um neurônio em seu estado prévio se o campo local induzido que age nele é exatamente zero.
- Se a rede da figura 98a está no estado inicial (1,1,1), (-1,-1,1) ou (1,-1,-1), ela convergirá para o estado estável (1,-1,1) após uma iteração.
- Se o estado inicial for (-1,-1,-1), (-1,1,1) ou (1,1,-1), ela convergirá para o segundo estado estável (-1,1,-1).
- A rede possui duas memórias fundamentais, (1,-1,1) e (-1,1,-1), representando os dois estados estáveis.
- A aplicação da eq. 53 leva à matriz de pesos sinápticos

$$\mathbf{W} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} +1 \\ -1 \\ +1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} +1, & -1, & +1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1, & +1, & -1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{62}$$

Exemplo [2]

$$\mathbf{W} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & -2 & +2 \\ -2 & 0 & -2 \\ +2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \tag{63}$$

- Que correspondem aos pesos sinápticos mostrados na figura 98a.
- Examinando o mapa de fluxos da figura 98b, a capacidade de correção de erro da rede de Hopfield pode ser vista:
  1. Se o vetor sonda ξ_{sonda} aplicado à rede for igual a (-1,-1,1), (1,1,1) ou (1,-1,-1), a saída resultante é a memória fundamental (1,-1,1). Cada um desses valores representa um único erro, comparado com o padrão armazenado.
  2. Se o vetor sonda ξ_{sonda} aplicado à rede for igual a (1,1,-1), (-1,-1,-1) ou (-1,1,1), a saída resultante é a memória fundamental (-1,1,-1). De novo, cada um desses valores representa um único erro, comparado com o padrão armazenado.

Bibliografia I

[1] W. R. Ashby
Design for a brain.
2nd. edition. New York: Wiley, 1960.

[2] S. Haykin
Neural networks - a comprehensive foundation.
2nd. edition. Prentice Hall, 1999.

[3] J. J. Hopfield
Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities.
Proceedings of the National Academy of Sciences, USA, vol. 79, pp. 2554–2558, 1982.