USP – ICMC – SME0806 - Estatística Computacional
3º trabalho – 1º/2016

1. A distribuição Weibull com parâmetros de forma $\alpha > 0$ e de escala $\beta > 0$ tem função densidade

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1}\exp\left(-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right), \text{ se } x > 0; \quad f(x;\alpha,\beta) = 0, \text{ caso contrário.}$$

   Realize um estudo de simulação para avaliar algumas propriedades dos estimadores de máxima verossimilhança de α e β. Diferentes valores de α e β, assim como diferentes tamanhos amostrais devem ser usados.

   Obs. Em linguagem R, estimativas de máxima verossimilhança de α e β e seus respectivos erros padrão podem ser obtidos com a função `fitdistr` do pacote `MASS`.

2. Uma forma de quantificar a concordância entre medições obtidas por dois métodos diferentes (X e Y) é dada pelo coeficiente de correlação de concordância, que é definido como

$$\rho_c = 1 - \frac{\text{DQM}}{\text{DQM}|_{\sigma_{XY}=0}} = \frac{2\sigma_{XY}}{(\mu_X - \mu_Y)^2 + \sigma_X^2 + \sigma_Y^2},$$

   em que DQM denota o desvio quadrático médio $\text{DQM} = \text{E}[(X-Y)^2] = (\mu_X - \mu_Y)^2 + \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\sigma_{XY}$ e $\text{DQM}|_{\sigma_{XY}=0}$ significa que a esperança é calculada supondo que a covariância entre X e Y é nula. Pode ser provado que $\rho_c \in [-1, 1]$. Os valores extremos representam discordância e concordância perfeita, respectivamente, enquanto que $\rho_c = 0$ representa ausência de associação.

   Um estimador para ρ_c é dado pela sua versão amostral, ou seja,

$$r_c = \frac{2S_{XY}}{\left(\overline{X} - \overline{Y}\right)^2 + S_X^2 + S_Y^2}.$$

   Pode ser provado que $Z = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+r_c}{1-r_c}\right)$ tem distribuição normal assintótica com média $\mu_Z = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\rho_c}{1-\rho_c}\right)$ e variância

$$\sigma_Z^2 = \frac{1}{n-2}\left[\frac{(1-\rho^2)\rho_c^2}{(1-\rho_c^2)\rho^2} + \frac{2v^2(1-\rho_c)\rho_c^3}{(1-\rho_c^2)^2\rho} - \frac{v^4\rho_c^4}{2(1-\rho_c^2)^2\rho^2}\right], \quad n > 2, \tag{1}$$

   em que ρ denota o coeficiente de correlação linear de Person e $v^2 = (\mu_X - \mu_Y)^2/(\sigma_X\sigma_Y)$.

   Foi coletada uma amostra aleatória de pares (X, Y) de medições angulares por dois métodos, sendo que o primeiro método (identificado por X) é mais caro do que o segundo método.

```
Amostra de pares (x, y)
x: 100, 58, 95, 55, 79, 95, 60, 88, 68, 94, 60, 64, 88, 57, 66, 67,
     76, 95, 85, 105, 80, 85, 82, 102, 100, 75, 40, 70, 63, 103, 95,
     80, 72, 68, 48, 70, 90, 60, 80, 96, 54, 80, 88, 70, 90, 79, 100,
     85, 108, 53, 58, 49
y: 97, 77, 74, 59, 79, 85, 78, 78, 68, 96, 74, 64, 76, 60, 78, 71,
     67, 103, 95, 78, 70, 80, 78, 102, 102, 77, 45, 60, 50, 94, 91,
     66, 63, 65, 58, 75, 105, 65, 80, 90, 58, 75, 83, 78, 85, 65, 90,
     76, 100, 65, 40, 53
```

(a) Represente graficamente os dados e comente sobre a concordância entre os dois métodos.

(b) Utilizando reamostragem, avalie a aproximação assintótica da distribuição de Z.

(c) Compare as estimativas do erro padrão de Z utilizando o resultado assintótico da expressão (1) e reamostragem.

(d) Utilizando intervalos de confiança, discuta a concordância entre os dois métodos.