Cálculo Numérico / Métodos Numéricos

Determinação numérica de autovalores e autovetores

Introdução

Transformações lineares

- Uma transformação linear é uma correspondência entre dois espaços vetoriais que preserva as propriedades de adição vetorial e multiplicação por escalar.

Seja **T** um operador linear

x e **y** vetores

α e β escalares

$$\boxed{T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)}$$

Note que multiplicação por matrizes são transformações lineares

Autovalores e autovetores

- Se existe uma transformação

$$T(v) = \lambda v$$

Então dizemos que

λ é um autovalor de T
v é um autovetor de T

Autovalores e autovetores de uma matriz

- Ex.: Seja

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinar seus autovalores e autovetores.

Solução:

Por definição procuramos um escalar λ e um vetor $v=(v_1,v_2)$ tais que: $Av = \lambda\, v$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Autovalores e autovetores de uma matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 3v_1 & + & 4v_2 & = & \lambda v_1 \\ 2v_1 & + & v_2 & = & \lambda v_2 \end{array} \right.$$

O que implica no sistema homogêneo:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} (3-\lambda)v_1 & + & 4v_2 & = & 0 \\ 2v_1 & + & (1-\lambda)v_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

Autovalores e autovetores de uma matriz

- Para que o sistema tenha solução não nula, o determinante da matriz dos coeficientes deve ser igual a zero:

$$\begin{vmatrix} (3-\lambda) & 4 \\ 2 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = \boxed{\lambda^2 - 4\lambda - 5} = (\lambda - 5)(\lambda + 1) \; = \; 0 \; .$$

polinômio característico

logo, os autovalores são λ=-1 e λ = 5

Autovalores e autovetores de uma matriz

- Para obter os autovetores, resolvemos o sistema para cada um dos autovalores obtidos:

$$\begin{cases} (3-\lambda)v_1 + 4v_2 = 0 \\ 2v_1 + (1-\lambda)v_2 = 0 \end{cases}$$

para λ = 5

$$\begin{cases} -2v_1 + 4v_2 = 0 \\ 2v_1 - 4v_2 = 0 \end{cases} \qquad v = (v_1,\ v_2)^t = (2,\ 1)^t$$

para λ = -1

$$\begin{cases} 4v_1 + 4v_2 = 0 \\ 2v_1 + 2v_2 = 0 \end{cases} \qquad v = (v_1,\ v_2)^t = (1,\ -1)^t$$

Aplicações

- economia,
- teoria da informação
- controle
- eletrônica

- ...

Por que métodos numéricos ?

- A menos que a ordem da matriz seja baixa, ou que a matriz seja esparsa, a expansão direta a partir do determinante é ineficiente.

$$\det(A - \lambda I) = 0$$