

PIPGEs ICMC – USP/UFSCar
EST5802 – Inferência Avançada – 2024/2
2ª lista de exercícios

Os exercícios 1–3 encontram-se no livro [1].

1. Exercício 28, Cap. 2.
2. Exercício 39, Cap. 2.
3. Exercício 59(a), Cap. 2.
4. Pode ser provado que duas estatísticas \mathbf{T}_1 e \mathbf{T}_2 são equivalentes se, e somente se, $\mathbf{T}_2 = \mathbf{H}(\mathbf{T}_1)$, em que \mathbf{H} é uma função bijetora. Quais das seguintes estatísticas são equivalentes?
 - (a) $\prod_{i=1}^n X_i$ e $\sum_{i=1}^n \log(X_i)$, $X_i > 0$.
 - (b) $\sum_{i=1}^n X_i$ e $\sum_{i=1}^n \log(X_i)$, $X_i > 0$.
 - (c) $(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2)^\top$ e $(\bar{X}, \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2)^\top$.

5. Prove que uma estatística $\mathbf{T}(\mathbf{X})$ é suficiente para $\boldsymbol{\theta}$ se, e somente se, a distribuição condicional de $\mathbf{U}(\mathbf{X})$ dada $\mathbf{T}(\mathbf{X})$ não depende de $\boldsymbol{\theta}$ para qualquer estatística $\mathbf{U}(\mathbf{X})$.
6. Considere $\theta \in (0, 1)$ e

$$\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{multinomial} \left(m, \frac{1}{2} + \frac{\theta}{4}, \frac{1}{4}(1 - \theta), \frac{1}{4}(1 - \theta), \frac{\theta}{4} \right).$$

Apresente uma estatística suficiente para θ .

7. Sejam $X_i \stackrel{\text{indep.}}{\sim} f(\cdot; \theta)$, em que $f(x; \theta) = \exp(i\theta - x)I_{(i\theta, \infty)}(x)$, $i = 1, \dots, n$. Represente graficamente $f(x; \theta)$. Prove que $\min(X_i/i, i = 1, \dots, n)$ é uma estatística suficiente para θ .
8. Considere $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{normal}(\theta, a\theta^2)$, sendo que $a > 0$ é uma constante conhecida e $\theta > 0$. Apresente uma estatística suficiente para θ .
9. Considere $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{uniforme}(\theta_1, \theta_2)$, em que $\theta_1 < \theta_2$. Apresente uma estatística suficiente para $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)^\top$.

Referência

- [1] Shao, J. *Mathematical Statistics*, 2nd ed., New York: Springer, 2003.