SMA 0333 Cálculo III - Lista 2

Bach. em Física

1. Podemos afirmar que se a sequência $\{a_n\}$ satisfaz $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$ então $\lim_{n\to\infty} a_n = a$?

2. Suponha que exista $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que:
$$a_n \leq b_n, \quad \forall n \geq n_1.$$
Prove que:
   (a) Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ então $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$
   (b) Se $\lim_{n\to+\infty} b_n = -\infty$ então $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$

3. Mostre, pela definição de limite que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{3n-2} = \dfrac{2}{3}$.

4. Mostre, pela definição de limite que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n+1}{2n-3} = \infty$.
Sugestão: Use o fato que $\frac{n^2+n+1}{2n-3} > \frac{n^2+n}{2n}$.

5. Verifique se é possível construir duas sequências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tais que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = c$ mas $\lim_{n\to\infty} b_n$ não existe.

6. Se $R\$1000,00$ forem investidos a uma taxa de juros de 6% compostos anualmente, depois de n anos o investimento valerá $a_n = 1000(1,06)^n$. Essa sequência converge ou diverge?

7. Mostre que se $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = a$ e $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = a$ então $\{a_n\}$ é convergente e $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

8. Considere uma sequência de termo geral a_n e suponha que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Prove que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = a.$$

9. Suponha que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Então
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} = a.$$
Sugestão: Utilize o exercício 7 e a identidade $x = e^{\ln x}$.

10. Mostre que:

    (a) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+...+\frac{n}{n})=\infty$;

    (b) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n}{n^2})=\frac{1}{2}$;

    (c) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^3}+...+\frac{n}{n^3})=0$;

    (d) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^5}+\frac{2}{n^5}+...+\frac{n^2}{n^5})=0$

11. Sejam $\{a_n\}$ uma sequência de Cauchy e $\{a_{2n}\}$ uma subsequência de $\{a_n\}$ convergente para a. Mostre que a sequência $\{a_n\}$ converge para a.

12. Seja $\{a_n\}$ uma sequência que tem a seguinte propriedade:

$$|a_{n+1}-a_n|\leq\frac{1}{2^n},\quad n\in\mathbb{N}.$$

    Mostre que $\{a_n\}$ é convergente.