USP/ICMC/SMA - 1ª Lista de SMA-333-CÁLCULO III e SMA-356-CÁLCULO IV.

Assunto: Sequências Numéricas.

1. Descubra a o termo geral a_n das sequências abaixo:

   a) $(1, 2, 4, 8, 16, \cdots)$.

   b) $(1, -1, 1, -1, 1, -1, \cdots)$.

   c) $(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots)$.

   d) $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{25}, \cdots)$.

   e) $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \cdots)$.

   f) $(1, 0, 2, 2, 4, 4, 8, 6, 16, 8, 32, 10 \cdots)$.

2. Enuncie todos os critérios dados em sala de aula para estabelecer a convergência de sequências numéricas.

3. Com os resultados listados acima, estabeleça se as sequências (a_n) abaixo convergem ou divergem, dizendo qual critério usou. Quando for possível calcule o limite da sequência.

$$
\begin{array}{lll}
a) \ a_n = n^{1/3} & b) \ a_n = \frac{1+(-1)^n}{n} & c) \ a_n = sen\frac{\pi}{n} \\
d) \ a_n = (1,000001)^n & e) \ a_n = (0,99999999999)^n & f) \ a_n = \frac{3^n}{2^n+10000} \\
g) \ a_n = \frac{\sqrt{n+2}}{2\sqrt{n}} & h) \ a_n = \frac{n}{(\ln n)^{2,5}} & i) \ a_n = \frac{n}{(\ln n)^{0.5}} \\
j) \ a_n = n^{(-1)^n} & k) \ a_n = \frac{n^4}{e^n} & l) \ a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\
m) \ a_n = cos\, n\pi & n) \ a_n = n(1 - cos(1/n)) & o) \ a_n = nsen\,\frac{1}{n} \\
p) \ a_n = n \tan \frac{1}{n} & q) \ a_n = \frac{sen(1+n)}{n!} & r) \ a_n = n - n^2 sen\frac{1}{n} \\
s) \ a_n = (1+3n)^{1/n} & t) \ a_n = \ln(1 - \frac{7}{n})^n & u) \ a_n = (1 + a/n)^n \text{ para } a \in R \\
v) \ a_n = \frac{(-1)^n (cosn)^{100}}{4^n} & x) \ a_n = \frac{e^n + e^{-n}}{e^n - e^{-n}} & z) \ a_n = 1 + cos\ n\pi
\end{array}
$$

4. Quais das sequências (a_n) abaixo convergem e quais divergem? Encontre o limite de cada sequência convergente.

$$
\begin{array}{lll}
a) \ a_n = \dfrac{n^3+n+1}{4n^3+2} & b) \ a_n = \dfrac{-10n^5 - 7n^2 + n + 5}{6n^6 + 3n^4 + 5n^2 + 3} & c) \ a_n = \dfrac{\sqrt{n^4 - 3n + 1}}{2n^2 + 1} \\
d) \ a_n = (-1)^n + \dfrac{(-1)^n}{n} & e) \ a_n = \dfrac{-ln(n^2)}{n} & f) \ a_n = ((-1)^n + 1)\dfrac{n+1}{n} \\
g) \ a_n = \dfrac{1+\sqrt{2n}}{\sqrt{n}} & h) \ a_n = \dfrac{4^{n+1} + 3^n}{4^n} &
\end{array}
$$

5. Sabendo-se que $(1 + 1/n)^n \to e$ verifique que

   a) $(1 + 1/n)^{2n} \to e^2$ b) $(1 + 1/n^2)^{n^2} \to e$ c) $(1 + 1/(2n))^n \to \sqrt{e}$ d) $(\frac{n+2}{n+1})^n \to e$

6. Encontre o limite das sequências abaixo fazendo a interpretação geométrica das mesmas:

   (a) $a_n = \int_1^n \frac{1}{x} dx$

   (b) $a_n = \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx, \alpha \neq 1$

   (c) $a_n = \int_0^n \frac{1}{1+x^2}$

   (d) $a_n = \int\int_{A_n} e^{-\sqrt{x^2+y^2}} dx\, dy$ para A_n a coroa circular $1/n^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1$, $n \geq 2$.

   (e) $a_n = \int\int_{A_n} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx\, dy$ para A_n a coroa circular $1/n^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1$, $n \geq 2$. Calcule a integral usando coordenadas polares.

7. Prove que $n^{\frac{1}{n}}$ é decrescente para $n \geq 3$.

8. Discuta a convergência ou divergência das sequências abaixo analisando se são monótonas e/ou limitadas.

   a) $a_n = \frac{n}{2^n}$ b) $a_n = ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ c) $a_n = \frac{n!}{n^n}$ d) $a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$

   e) $s_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k^3$ f) $s_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}$ g) $s_n = \sum_{k=1}^{n} 1/\sqrt{k}$ h) $s_n = \sum_{k=1}^{n} [1/(k(k+1))]$

   Sugestão $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$.

9. Teste da razão e da raiz para convergência de sequências: Seja $a_n > 0$ para todo n.

   a) Mostre que se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to L$ onde $0 \leq L < 1$ então $a_n \to 0$. E se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to L > 1$ ou $L = \infty$ então $an \to \infty$.

   b) Mostre que se $\sqrt[n]{a_n} \to L$ onde $0 \leq L < 1$ então $a_n \to 0$. Se $L = \infty$ ou $L > 1$ então $a_n \to \infty$.

   c) Use o item a) e calcule o limite para as sequências abaixo e veja se é possível determinar quais sequências a_n convergem para 0? Quais vão para infinito?

   i) $a_n = n$ ii) $a_n = n^2/2^n$ iii) $a_n = \frac{n!}{n^n}$ iv) $a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$ v) $a_n = \sqrt{n}(\frac{2n-1}{n^2+13})^n$

   vi) $a_n = \frac{n!}{n^n}$ vii)$a_n = \frac{2^n}{n!}$ viii) $a_n = \frac{(2n!)}{n^{2n}}$ ix) $a_n = \frac{1.\ 3.\ 5.\ 2n-1}{2.\ 4.\ 6\ .2n}$

10. Assuma como verdadeiro o fato de que

   "se $a_n \to a$ então $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \to a$ (ver Guidorizzi - vol.4 - pag.4)"

   a) Conclua então que se $a_n > 0$ e $a_n \to a > 0$ então $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} \to a$.

   b) Verifique que se $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to L$ então $\sqrt[n]{a_n} \to L$. c) Calcule o limite $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ para as sequências mdo item c) da questão anterior e veja se é possível dizer quais convergem para zero e quais vao para infinito, usando esta técnica. Compare as duas técnicas.

11. Encontre o termo geral a_n para as sequências abaixo sabendo-se que $a_0 = 1$ e que:

   a) $a_{n+1} = a_n/3$ b) $a_{n+1} = (1 + j)a_n$ (j constante fixa) c) $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (1/3)^k$ d) $a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$.

12. a) Suponha que um capital a_0 seja investido numa aplicação que rende juros de 1% ao final de cada mês. Descreva o montante a_n no mês n.

   b) Calcule o montante após 36 meses de aplicação se $a_0 = R\$1000,00$.

   c) Caso você fique devendo R\$ 1000,00 para um banco, que cobre 10% de juros ao mês, qual será sua dívida com o banco no final de 36 meses.(Nunca caia nessa!!!)

13. Seja (a_n) sequência real e $a \in R$.

   a) Escreva a definição de $a_n \to a$.

   b) Use a definição para concluir que $a_n \to 0 \Leftrightarrow |a_n| \to 0$.

   c) É verdade que $a_n \to a \Leftrightarrow |a_n| \to |a|$ para $a \neq 0$?

   d) Conclua, usando a definição, que se (a_n) é sequência real tal que $a_n \to a$ então $a_{n+1} \to a$.

   e) Conclua, usando a definição, que se (a_n) é sequência real tal que $a_{2n+1} \to a$ e $a_{2n} \to a$ então $a_n \to a$.

14. Indique se a frase é verdadeira ou falsa, dando um contra-exemplo quando for falsa e mostrando a afirmaação quando for verdadeira.

   (a) ( ) Toda sequência a_n limitada convergente.
   (b) ( ) Toda sequência ilimitada é tal que $a_n \to \infty$ ou $a_n \to -\infty$.
   (c) ( ) Se $|a_n| \to L$ então a_n é convergente
   (d) ( ) Toda sequência monótona é convergente.
   (e) ( ) Toda sequência monótona crescente é tal que $a_n \to \infty$.
   (f) ( ) Toda sequência monótona decrescente é tal que $a_n \to -\infty$.
   (g) ( ) Se duas subsequências de uma sequência convergem para o mesmo valor a então a sequência também converge para a.
   (h) ( ) Se $a_{2n} \to a$ e $a_{3n} \to a$ então $a_n \to a$.
   (i) ( ) Se $a_n \to \infty$ e $b_n \to 0$ então $a_n b_n \to 0$ pois qualquer número multiplicado por 0 é 0.
   (j) A sequência $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ é crescente e limitada.

15. Sejam a_n e b_n sequências tais que $|a_n - b_n| \leq e^{-n}$. O que se pode dizer sobre o comportamento de ambas no infinito?

   i) Verifique que se $a_n \to a \in R$ então $b_n \to a$.

   ii) O que ocorre se uma das sequências for para ∞? Justifique. Sugestão: Lembre da desigualdade triangular.

16. Seja a sequência tal que

    $a_1 = \sqrt{3}$, $a_2 = \sqrt{3 + 2a_1}$, $a_3 = \sqrt{3 + 2a_2}$, $a_{n+1} = \sqrt{3 + 2a_n}$.

    i) Mostre que a_n é crescente.

    ii) Mostre que $0 < a_n < 4$ usando o método da indução finita.

    iii) Conclua que existe a tal que $a_n \to a$ e que $a \geq 0$.

    iv) Calcule $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$.

17. Para as sequências abaixo:

    i) Calcule os 7 primeiros.

    ii) Com base no item anterior o que deve ser a_n?

    iii) Use o método da indução finita para confirmar seu palpite no item ii).

    a) Seja a sequência (a_n) tal que $a_0 = 1$ e $na_n = a_{n-1}$ para $n \geq 1$.

    b) Seja a_n tal que $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ e $a_{n+2} = \frac{-1}{n+2} a_n$ para $n \geq 0$.

    c) Seja a sequência (a_n) tal que $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ e $(n+1)a_{n+1} - 2a_{n-1} = 0$ para $n \geq 1$.

    d) Seja a sequência (a_n) tal que $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$. Suponha ainda que

    $(n+2)(n+1)a_{n+2} - (2n+1)a_n = 0$ para $n \geq 0$.

OBS: O último exercício será utilizado na resolução de equações diferenciais via séries de Taylor e séries de Fourier.