Introdução a Sistemas Inteligentes

Raciocínio Aproximado e Sistemas Fuzzy – Parte I:
Conceituação e Conjuntos Fuzzy

Prof. Ricardo J. G. B. Campello

ICMC / USP

Créditos

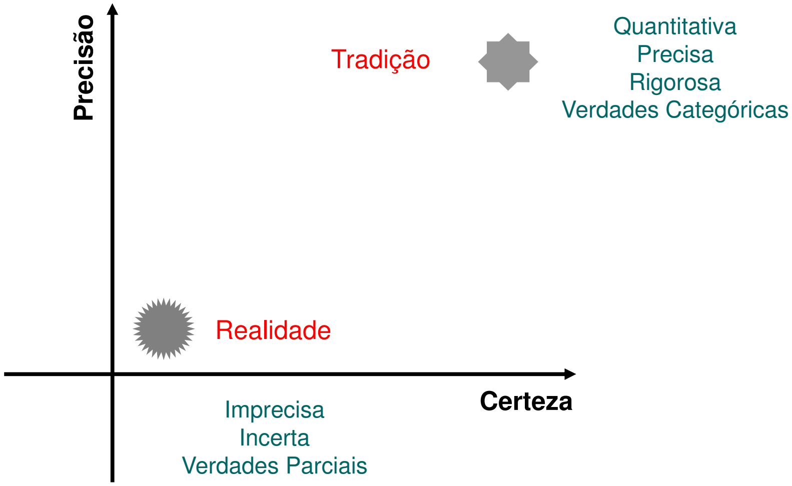
- Parte deste material consiste de adaptações e extensões dos originais gentilmente cedidos:
  - pelo Prof. Dr. Fernando Antonio Campos Gomide da FEEC/Unicamp
  - Pelo Dr. Rodrigo Almeida Gonçalves da empresa CFLEx - Computação Flexível

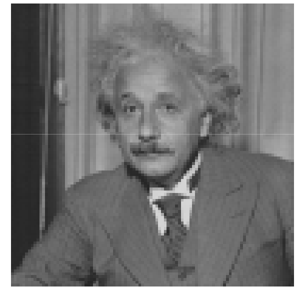
Aula de Hoje

- Contextualização
  - Sistemas Fuzzy e Computação Flexível
- Noções de Conjuntos Fuzzy

Contextualização

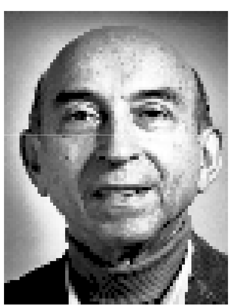
Ciência: Tradição e Realidade





"As far as the propositions of mathematics refer to reality, they are not certain; and as far as they are certain, they do not refer to reality" [Einstein, 1928]

Princípio da Incompatibilidade (Zadeh, 1973)

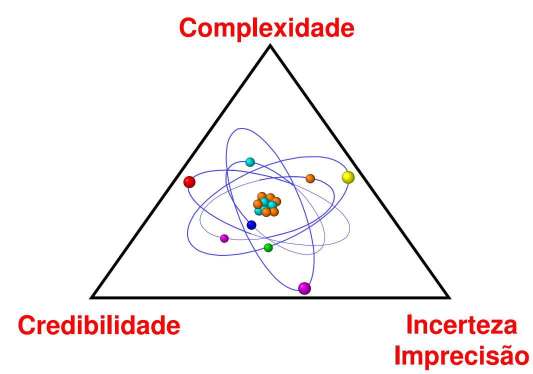


Lotfi Zadeh

"Stated informally, the essence of this principle is that as the complexity of a system increases, our ability to make precise and yet significant statements about its behavior diminishes until a threshold is reached beyond which precision and significance (or relevance) become almost mutually exclusive characteristics."

IEEE Int. Conf. Fuzzy Systems – Budapest 2004

Modelos, Realidade e Utilidade (George Klir, 1995)



"Although usually undesirable when considered alone, uncertainty becomes very valuable when considered in connection to the other characteristics of systems models: in general, allowing more uncertainty tends to reduce complexity and increase credibility of the resulting model"

Problema da Dicotomia

One seed does not constitute a pile nor two nor three… from the other side everybody will agree that 100 million seeds constitute a pile. What therefore is the appropriate limit? Can we say that 325,647 seeds don't consitute a pile but 325,648 do?

Borel, 1950

Paradoxo de Zeno

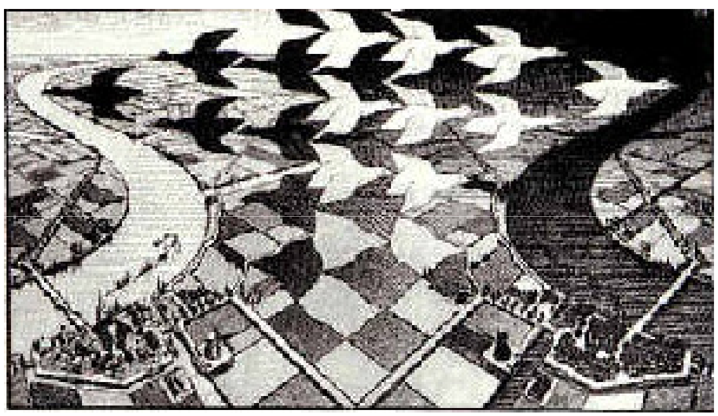
•Am I bald? No.

- Pluck out a hair.

•Am I bald now? No.

- You keep plucking and asking but do not find that one hair that takes you from not-bald to bald. Yet you are bald if you pluck out all or most of your 100,000 or so head hairs.

Convivência dos Opostos



Escher, 1938

Convivência dos Opostos

Vagueness

"Logicians have too much neglected the study of vagueness, not suspecting the important part it plays in mathematical thought"
Charles Sanders Peirce (1839 - 1914)

"Everything is vague to a degree you do not realize till you have tried to make it precise" **Bertrand Russell (1872 - 1970)**

Vagueness / Fuzziness

Teoria clássica de conjuntos é facilmente aplicada para que um banco de dados responda a uma consulta do tipo:

idade = 40 anos **&** salário ≥ R$10.000

Mas como aplicá-la para responder à consulta abaixo ???

idade ≈ 40 anos **&** salário alto

"Fuzzy"

- *Fuzzy* em Inglês Significa:
  - *Indistinct*
  - *Blurred*
  - *Not Sharply Delineated or Focused*
- Em Português:
  - *Nebuloso*
  - *Difuso*

"Fuzzy"

Tecnicamente, *fuzzy* representa imprecisão ou incerteza baseada na intuição humana e não na teoria de probabilidade

Imprecisão e Incerteza

(Sandri & Correa, 1999)

- **Probabilidade**
- Não considera incerteza (preciso) mas é incerto:
  - Filme começa 3:30h (p<1)
- Considera incerteza (impreciso) e é quase certo:
  - Filme começa entre 3:15h e 3:45h (p≈1)
- ***Fuzziness / Vagueness***
- Impreciso e Vago ⟹ Filme começa por volta de 3:30h

Lembrando Einstein, Zadeh, Klir, ...

admitir imprecisão / incerteza torna o modelo mais realista e confiável !

Fuzziness × Probability

(James C. Bezdek, 1993)

Pertinência (Água Potável) = 0.9

Probabilidade (Água Potável) = 0.9

Fuzziness as Probability

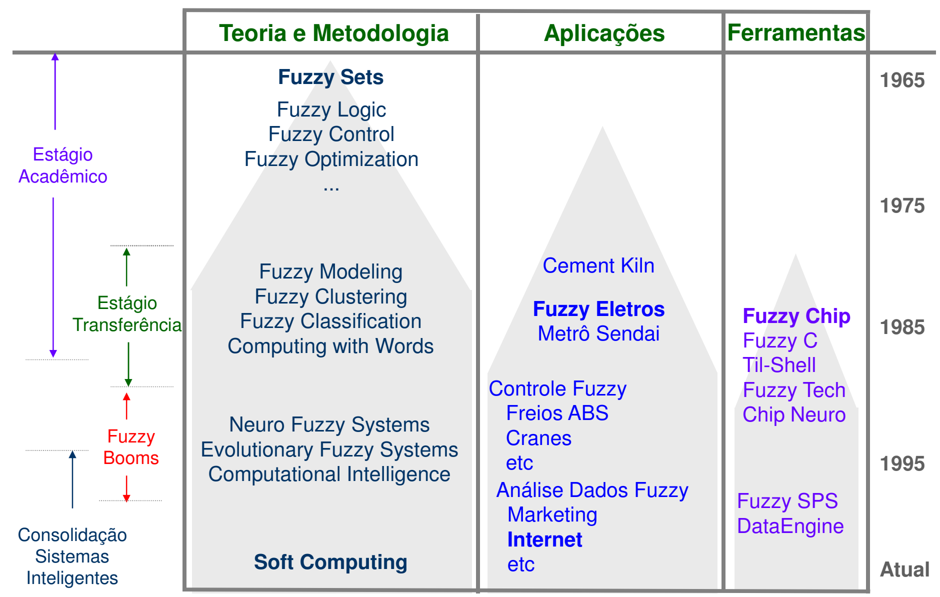
(H. T. Nguyen, 1978)

$$\mu_A(x) = \text{prob}\{X=A \mid X = x\}$$

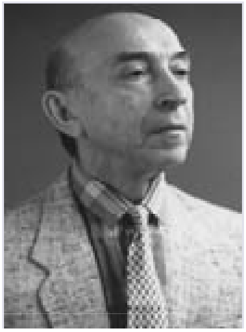
Breve Histórico

~1920: J. Lukasiewicz, E. Post (three-valued and many valued logic)
~1965: L. A. Zadeh (fuzzy sets)
~1974: E. H. Mamdani (fuzzy controller)
~1978: 1st high impact journal (Fuzzy Sets & Systems – Elsevier)
~1982: 1st major industrial application into operation (Denmark)
~1985: 1st fuzzy chip (1.28 Kilo-FLIPS – Bell Laboratories)
IFSA Society and 1st World Congress (Palma de Mallorca, Spain)
~1986: Hitachi subway train controller (Sendai / Japan)
~1987: Widespread applications of fuzzy sets in Japan
~1990: Widespread applications of fuzzy sets worldwide
1992: 1st IEEE Int. Conference on Fuzzy Systems (San Diego, USA)
USD 2 billion worth of fuzzy products produced in Japan
1993: Inaugural Issue of the IEEE Transactions on Fuzzy Systems
1995: First major conference in Brazil (IFSA'95, São Paulo)

Evolução dos Sistemas Fuzzy



Fonte: Zimmermann, 1999



Algumas Estatísticas de Impacto

No. de Artigos Científicos com Termo Fuzzy no Título:

- **INSPEC**
  1970-1980: 569
  1980-1990: 2403
  1990-2000: 23220
  2000-2008: 32655
  Total: 58847

- **Math.Sci.Net**
  1970-1980: 444
  1980-1990: 2466
  1990-2000: 5487
  2000-2008: 7819
  Total: 16216

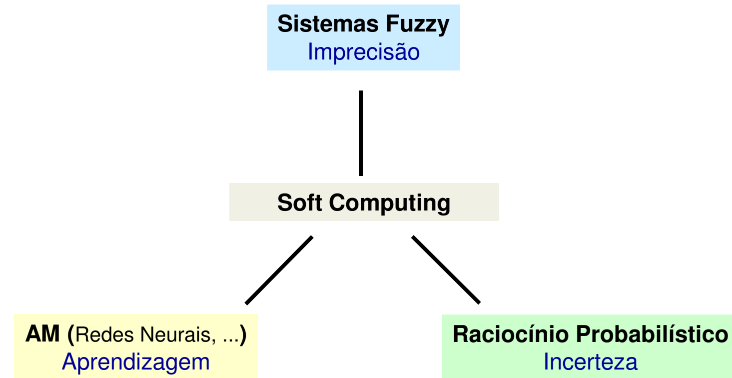
- No. Citações de Lofti A. Zadeh no Citation Index (até 2008): > 17000

- Número de patentes requeridas no Japão: ~17700
- Número de patentes obtidas no Japão: ~ 4800
- Número de patentes obtidas nos EUA: ~ 1700

Fonte (17/07/2008): http://www.cs.berkeley.edu/~zadeh/

Computação Flexível

(sentido restrito acadêmico)

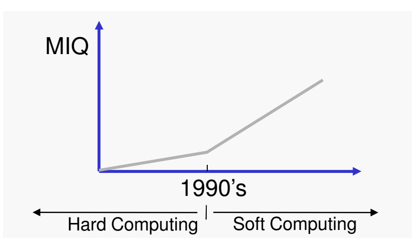


Computing & Soft Computing

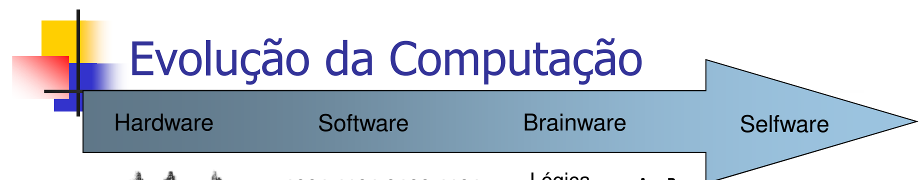
- **Hard Computing:** Conventional view of computing
  Imprecision and uncertainty are inconvenient

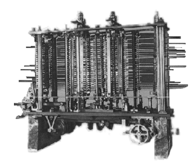
- **Soft Computing:** Exploits tolerance for imprecision / uncertainty to get:
  - tractability
  - reliability
  - robustness
  - lower cost (e.g. economy of communication)

Hard Computing	Soft Computing
needs detailed instructions	is able to learn
two-valued logic	many-valued logic
deterministic	possibly stochastic
handles exact data	can handle imprecision



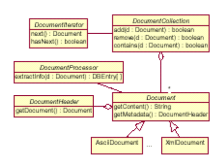
Evolução da Computação



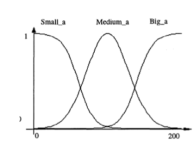


Mecânico
Válvula
Transistor
CI
Novas Tecnologias
...

1001 1101 0100 1101
Baixo Nível
Não Estruturado
Estruturado/Funcional
P. O. Objeto
Eng. Software
Comp. Distribuída
Webmídia
...



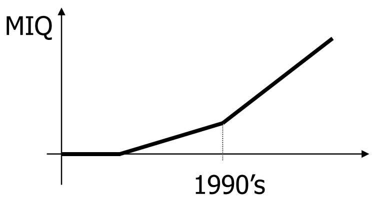
Lógica
Álgebra
Estatística
P. Operacional
Lógicas Multi-Valoradas
Redes Neurais
Sistemas Fuzzy
Computação Evolutiva
Sistemas Híbridos
Semiótica Computacional
...

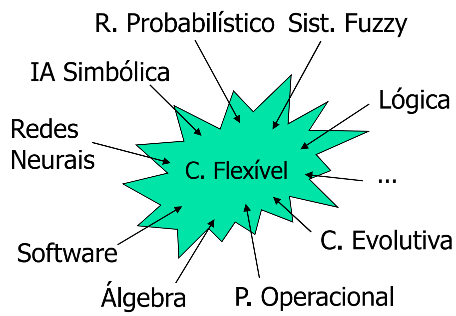


Vida Artificial
Emoções
Consciência
...

Computação Flexível

- Brainware / Software Inteligente
  - Soluções Computacionais *que envolvem* elementos da área de Sistemas Inteligentes





Computação Flexível

- O desafio não se restringe às técnicas em si, mas também como aplicá-las e adaptá-las, conforme a necessidade:
  - Engenharia de *hardware*
  - Engenharia de *software*
  - Engenharia de *brainware*

Conjuntos Fuzzy

Conjuntos

- ❑ **São coleções de elementos**
- ❑ **São utilizados para categorizar elementos:**
  - **números pares**
  - **cidades que são capitais na América do Sul**
  - **carros esporte**
  - **números ímpares**
  - **times de futebol**
  - **...**

• mas na realidade existem situações como estas:

- **grandes** cidades da América do Sul
- **baixa** temperatura
- **alta** taxa de inflação

• e termos como os seguintes:

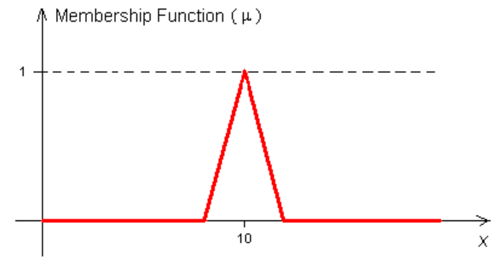
– **pequeno** erro de aproximação
– **rápida** resposta de um sistema
– etc

Conjuntos ?????

Conjuntos "Crisp" & Conjuntos Fuzzy

• F. Característica (Conjunto Clássico): $\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$

• F. Pertinência (Conjunto Fuzzy): $\mu_A(x) \in [0,1]$



Fuzzy set "About Ten"

Conjuntos Fuzzy

Definição (Zadeh 1965):

- Um **conjunto fuzzy** é caracterizado por uma **função de pertinência** que mapeia os elementos de um domínio, espaço ou **universo de discurso X** no intervalo unitário [0,1]

- Formalmente: $A: \ \mathbf{X} \rightarrow [0,1]$

- Em Português, esses conjuntos são também denominados **conjuntos nebulosos** ou **difusos**

Exemplos de Algumas Funções de Pertinência:

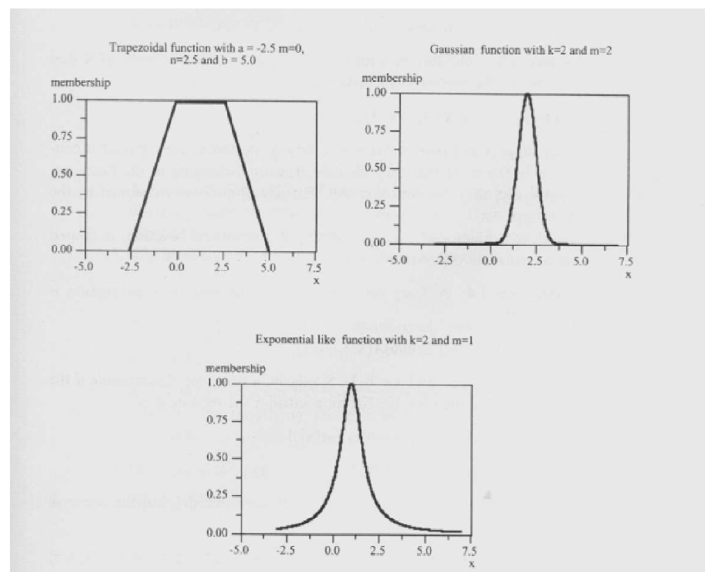


Figure 1.6
Examples of selected membership functions;

(Pedrycz & Gomide, 1998)

Conjuntos Fuzzy

- Se o universo de discurso (**UoD**) for discreto, pode-se definir como um conjunto de pares ordenados $A = \{ \mu_A(x) / x \ : \ x \in \mathbf{X} \}$, onde $\mu_A(x)$ (ou simplesmente $A(x)$) é a função de pertinência
- Exemplo:

  - possível definição de conjunto fuzzy dos números inteiros entre [5,15] e próximos a 10:

  A = { 0/5, 0/6, 0.25/7, 0.50/8, 0.75/9, 1/10, 0.75/11, 0.50/12, 0.25/13, 0/14, 0/15 }

Operações Básicas

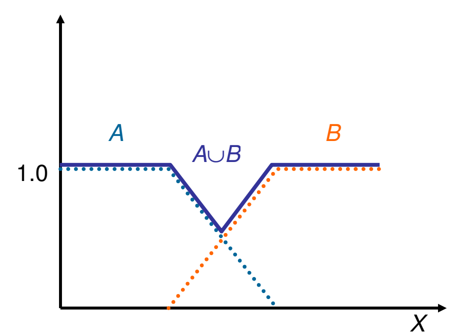
- Virtualmente qualquer operação definida sobre conjuntos crisp pode ser estendida para o domínio fuzzy
- As mais básicas são união, interseção e complemento
- **União**: A união de dois conjuntos fuzzy A e B definidos sobre um UoD **X** é um conjunto fuzzy C em **X** ,denotado $C = A \cup B$, tal que para cada $x \in \mathbf{X}$ tem-se:

$$C(x) = A(x) \vee B(x)$$

onde $\vee$ representa um operador de disjunção

Operações Básicas

União (max como operador de disjunção**):**



$$(A \cup B)(x) = A(x) \vee B(x) = \max[A(x), B(x)] \qquad \forall x \in \mathbf{X}$$

Operações Básicas

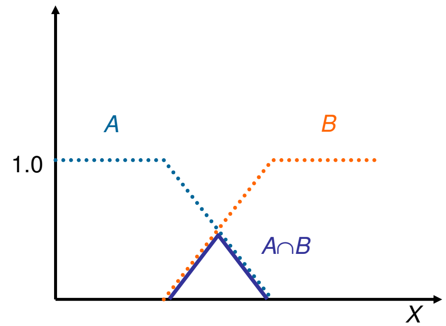
- Virtualmente qualquer operação definida sobre conjuntos crisp pode ser estendida para o domínio fuzzy
- As mais básicas são união, interseção e complemento
- **Interseção**: A interseção de dois conjuntos fuzzy A e B definidos sobre um UoD **X** é um conjunto fuzzy C em **X**, denotado $C = A \cap B$, tal que para cada $x \in \mathbf{X}$ tem-se:

$$C(x) = A(x) \wedge B(x)$$

onde $\wedge$ representa um operador de conjunção

Operações Básicas

Interseção (min como operador de conjunção**):**



$$(A \cap B)(x) = A(x) \wedge B(x) = \min[A(x), B(x)] \qquad \forall x \in \mathbf{X}$$

Operações Básicas

- Abaixo seguem algumas importantes relações que podem ser verificadas:

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$	Associatividade da Interseção
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$	Associatividade da União
$A \cap B = B \cap A$	Comutatividade da Interseção
$A \cup B = B \cup A$	Comutatividade da União
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributividade de $\cap$ sobre $\cup$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Distributividade de $\cup$ sobre $\cap$
$A \cup A = A \cap A = A$	Idempotência
$A \subseteq B$ e $B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C$	Transitividade

Nota:

– Um **subconjunto fuzzy** *A* de um conjunto fuzzy *B* é tal que $A(x) \leq B(x) \quad \forall x \in \mathbf{X}$
– Nesse caso diz-se que $A \subseteq B$

Operações Básicas

- Outras relações que podem ser verificadas:

$A \subseteq B \leftrightarrow A \cup B = B \leftrightarrow A \cap B = A$
$A \cup \varnothing = A$
$A \cap \varnothing = \varnothing$
$A \cup \mathbb{X} = \mathbb{X}$
$A \cap \mathbb{X} = A$
$A \cap B \subseteq A$ e $A \cap B \subseteq B$
$A \cup B \supseteq A$ e $A \cup B \supseteq B$
$A \cap B \subseteq A \cup B$

Notas:

– $\mathbb{X}$ é o **conjunto universo**, definido como $\mathbb{X}(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbf{X}$
– $\varnothing$ é o **conjunto vazio**, definido como $\varnothing(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbf{X}$

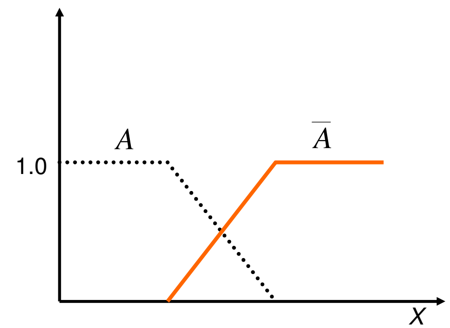
Operações Básicas

- ❑ Virtualmente qualquer operação definida sobre conjuntos crisp pode ser estendida para o domínio fuzzy
- ❑ As mais básicas são união, interseção e complemento
- ❑ **Complemento**: O complemento de um conjunto fuzzy *A* definido sobre um UoD **X** é um conjunto fuzzy *C* em **X**, denotado $C = \neg A$ ou $C = \bar{A}$ tal que para cada $x \in \mathbf{X}$ tem-se:

$$C(x) = 1 - A(x)$$

Operações Básicas

Complemento:



$$\overline{A}(x) = 1 - A(x) \qquad \forall x \in \mathbf{X}$$

Operações Básicas

Nota:

- O **complemento relativo (diferença)** de um conjunto fuzzy *B* com relação a um conjunto fuzzy *A*, denotado por *C* = *A* – *B*, é definido como:

$$C(x) = \max[0, A(x) - B(x)] \quad \forall x \in \mathbf{X}$$

Operações Básicas

- Abaixo seguem algumas relações envolvendo complementos:

$\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$	de Morgan
$\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$	de Morgan
$\neg(\neg A) = A$	Dupla negação (*Involution*)
$\neg\varnothing = \mathbb{X}$ e $\neg\mathbb{X} = \varnothing$	
$A \subseteq B \rightarrow \neg A \supseteq \neg B$ e $A - B = \varnothing$	
$A - A = \varnothing$	
$A - \varnothing = A$ e $\varnothing - A = \varnothing$	

Note que as leis Aristoteleanas da Não Contradição e do Terceiro Excluído não se mantêm no domínio fuzzy, o que não é de se surpreender !

Conjuntos Fuzzy

- ❑ Diversas outras definições e propriedades...
- ❑ Cardinalidade, similaridade, especificidade, suporte, entropia, inclusão, etc
- ❑ Permitem estender o raciocínio tradicional com conjuntos para o **raciocínio aproximado**

Teoria de Conjuntos Nebulosos

- A teoria de conjuntos nebulosos compreende:
  - **Extensão de teorias clássicas** para o domínio fuzzy
    - p. ex. a própria teoria clássica dos conjuntos
  - **Aritmética nebulosa**
    - p. ex. números fuzzy
  - **Programação matemática nebulosa**
    - p. ex. programação linear fuzzy
  - **Análise nebulosa de dados**
    - p. ex. agrupamento e classificação fuzzy
  - **Lógica Nebulosa**
  - **etc**

Lógica (Revisão)

- **Lógica Aristoteleana (bivalor):**

- Verdade V admite apenas 2 valores, V = True (1) ou V = False (0).

- Obedece as leis clássicas:
  - Não Contradição: $V(A \wedge \neg A) = 0$.
  - Terceiro Excluído: $V(A \vee \neg A) = 1$.

- Lógica Clássica:

A	**B**	**$A \wedge B$**	**$A \vee B$**	**$\neg A$**	**$A \Rightarrow B$**
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	0	1

"All traditional logic assumes that precise symbols are being employed. It is therefore not applicable to this terrestrial life, but only to an imaginary celestial existence"

Bertrand Russell (*British Philosopher & Logician*)

"Vagueness", *Australian Journal of Philosophy* , V. 1, 84-92, 1923

Paradoxos e Lógicas Multivalores

- Paradoxo medieval do mentiroso de Creta:
  - *"The Cretan says that all Cretans lie". Does he lie or tell the truth?*

- Paradoxo da teoria clássica dos conjuntos:
  - *O conjunto de todos os conjuntos é um conjunto. Então ele é um membro de si mesmo. Mas muitos conjuntos não são membros de si mesmos. O conjunto das maçãs não é um membro de si mesmo pois seus elementos são maçãs e não conjuntos. Mas o que dizer a respeito do conjunto de todos os conjuntos que não são membros de si mesmos? Ele é um membro de si mesmo? Se ele é então não é e vice-versa.*

Paradoxos levaram ao desenvolvimento das Lógicas Multivalores

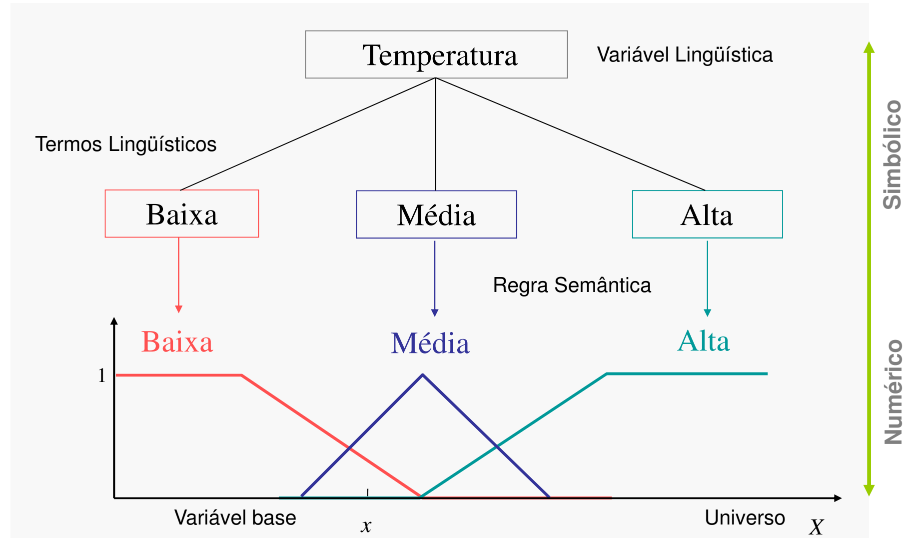
Ex. Lukasiewicz:

$A \wedge B$	**$A \vee B$**	**$\neg A$**	**$A \Rightarrow B$**
min(A,B)	max(A,B)	1 - A	min(1,1-A+B)

Lógica Nebulosa

- **Lógica Nebulosa**: sistema lógico que formaliza o raciocínio aproximado, indo muito além de apenas admitir múltiplos valores verdade
  - Variáveis lingüísticas
  - Regras lingüísticas se-então
  - Quantificadores nebulosos
  - ...
- Estes elementos não são comuns em outras lógicas multivalores

Variáveis Lingüísticas



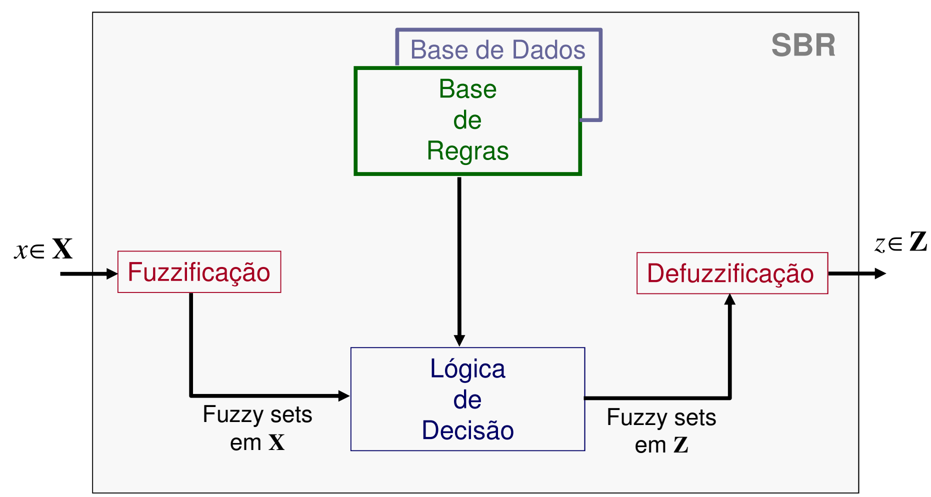
Regras Lingüísticas

- Geralmente são proposições “Se – Então”
- A forma mais usual é do tipo

Se *velocidade* é <u>alta</u> e *distância* é <u>pequena</u> **Então** *tempo de viagem* é <u>curto</u>

variáveis linguísticas **termos linguísticos**

Sistemas Baseados em Regras Nebulosas

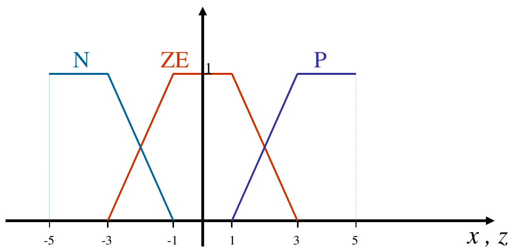


Exercícios

1. Representar graficamente a função de pertinência do conjunto "crisp" (não fuzzy) dos números pares no universo de discurso (UoD) $\mathbf{X} = [10,20]$. Justificar
2. Esboçar graficamente a f. de pertinência de um conjunto *fuzzy* "Aproximadamente igual ou maior que 10" no UoD $\mathbf{X} = [0,20]$. Justificar
3. Projetar uma var. lingüística "Tempo de processamento" com 5 conjuntos *fuzzy*. Ilustrar graficamente as respectivas funções de pertinência (p. ex. trapezoidais) definindo os termos lingüísticos correspondentes e o UoD adotado. Justificar

Exercícios

4. Represente graficamente os complementos, uniões e interseções envolvendo todas as possíveis combinações dos conjuntos fuzzy **NE**, **ZE** e **P** abaixo (ou seja, o complemento de NE, ZE e P, a interseção/união de NE com ZE, NE com P e ZE com P, o complemento desses últimos, a interseção/união desses com os conjuntos individuais, etc)



Exercícios

5. Mostre que as relações envolvendo conjuntos fuzzy apresentadas em aula (associatividade, comutatividade, distributividade, etc) são de fato válidas para as definições de interseção, união e complemento vistas

Referência Principal

- W. Pedrycz & F. Gomide, "An Introduction to Fuzzy Sets: Analysis and Design", MIT Press, 1998.