

SCE5880  
Algoritmos de Estimação para  
Robótica Móvel

---

**SLAM II**  
Localização e Mapeamento  
Simultâneos

1

**GraphSLAM**

- As posições do robô ao longo do tempo e os landmarks correspondem a nós em um grafo.
- As informações odométricas entre posições consecutivas e landmarks vistos em diferentes posições equivalem a arcos do grafo
- O algoritmo é executado em 2 etapas.
  - Na primeira etapa, o mesmo apenas acumula dados e constrói o grafo.
  - Na segunda etapa, o o grafo é rearranjado para acomodar os dados obtidos.
- Diferente do SLAM utilizando filtro de Kalman, o Graph SLAM estima a posição do robô durante todo o trajeto.

2

**Filtro de Informação**

- 1: **Algorithm Kalman\_filter**( $\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}, u_t, z_t$ ):
- 2:  $\hat{\mu}_t = A_t \mu_{t-1} + B_t u_t$
- 3:  $\hat{\Sigma}_t = A_t \Sigma_{t-1} A_t^T + R_t$
- 4:  $K_t = \hat{\Sigma}_t C_t^T (C_t \hat{\Sigma}_t C_t^T + Q_t)^{-1}$
- 5:  $\mu_t = \hat{\mu}_t + K_t (z_t - C_t \hat{\mu}_t)$
- 6:  $\Sigma_t = (I - K_t C_t) \hat{\Sigma}_t$
- 7: return  $\mu_t, \Sigma_t$

- 1: **Algorithm Information\_filter**( $\xi_{t-1}, \Omega_{t-1}, u_t, z_t$ ):
- 2:  $\Omega_t = (A_t \Omega_{t-1} A_t^T + R_t)^{-1}$
- 3:  $\xi_t = \Omega_t (A_t \Omega_{t-1}^{-1} \xi_{t-1} + B_t u_t)$
- 4:  $\Omega_t = C_t^T Q_t^{-1} C_t + \Omega_t$
- 5:  $\xi_t = C_t^T Q_t^{-1} z_t + \xi_t$
- 6: return  $\xi_t, \Omega_t$

3

**GraphSLAM**

Sum of all constraints:  
 $J_{GraphSLAM} = x_0^T \Omega_0 x_0 + \sum [x_t - g(u_t, x_{t-1})]^T R^{-1} [x_t - g(u_t, x_{t-1})] + \sum [z_t - h(m_t, x_t)]^T Q^{-1} [z_t - h(m_t, x_t)]$

4

**Information Filter**

**Controle:**

$$\Omega \leftarrow \Omega + \begin{pmatrix} 1 \\ -G_t \end{pmatrix} R_t^{-1} (1 - G_t)$$

$$\xi \leftarrow \xi + \begin{pmatrix} 1 \\ -G_t \end{pmatrix} R_t^{-1} [g(u_t, \mu_{t-1}) + G_t \mu_{t-1}]$$

**Percepção:**

$$\Omega \leftarrow \Omega + H_t^T Q_t^{-1} H_t$$

$$\xi \leftarrow \xi + H_t^T Q_t^{-1} [z_t^T - h(\mu_t, c_t^T) - H_t \mu_t]$$

5

**GraphSLAM**

6

### GraphSLAM

(a) The removal of  $m_3$  changes the link between  $x_2$  and  $x_3$

(b) The removal of  $m_3$  introduces a new link between  $x_2$  and  $x_4$

(c) Final Result after removing all map features

SCE-5868 Denis F. Wolf 7

### Filtro de Informação

**Matriz de informação**  $\rightarrow \Omega = \Sigma^{-1}$

**Vetor de informação**  $\rightarrow \xi = \Sigma^{-1} \mu$

$$\Sigma = \Omega^{-1}$$

$$\mu = \Omega^{-1} \xi$$

SCE-5868 Denis F. Wolf 8

### GraphSLAM

SCE-5868 Denis F. Wolf 9

### GraphSLAM

SCE-5868 Denis F. Wolf 10


### GraphSLAM

SCE-5868 Denis F. Wolf 11

### GraphSLAM


SCE-5868 Denis F. Wolf 12

### GraphSLAM



SCE-5868 Denis F. Wolf 13

### GraphSLAM



SCE-5868 Denis F. Wolf 14

### GraphSLAM

Coordinated exploration with three robots from unknown start locations

The robots are fully autonomous. All computation is performed on-board.

Shown is the perspective of one robot

SCE-5868 Denis F. Wolf 15

### GraphSLAM

**Resumo:**

Método *off-line* que estima a trajetória **completa** do robô e o mapa.

SCE-5868 Denis F. Wolf 16

### GraphSLAM - Implementação

$\Omega$					$\xi$
$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$L_0$	$X_0$

SCE-5868 Denis F. Wolf 17

### GraphSLAM - Implementação

$\Omega$					$\xi$
$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$L_0$	$X_0$
1					2

$X_0 = 2$

SCE-5868 Denis F. Wolf 18

GraphSLAM - Implementação

$\Omega$					$\xi$	$X_1 = X_0 + 5$
$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$L_0$	$X_0$	
$1+1$	$-1$				$2-5$	$X_0 - X_1 = -5$
$-1$	$+1$				$+5$	$X_1 - X_0 = 5$

SCE-5868 Denis F. Wolf 19

GraphSLAM - Implementação

$\Omega$					$\xi$	$X_1 = X_0 + 5$
$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$L_0$	$X_0$	
$2$	$-1$				$-3$	$X_0 - X_1 = -5$
$-1$	$1$				$5$	$X_1 - X_0 = 5$

SCE-5868 Denis F. Wolf 20

GraphSLAM - Implementação

$\Omega$					$\xi$	$L_0 = X_1 + 9$
$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$L_0$	$X_0$	
$2$	$-1$				$-3$	$X_1 - L_0 = -9$
$-1$	$1+1$			$-1$	$5-9$	$L_0 - X_1 = 9$
	$-1$			$+1$	$+9$	

SCE-5868 Denis F. Wolf 21

GraphSLAM - Implementação

$\Omega$					$\xi$	$L_0 = X_1 + 9$
$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$L_0$	$X_0$	
$2$	$-1$				$-3$	$X_1 - L_0 = -9$
$-1$	$2$			$-1$	$-4$	$L_0 - X_1 = 9$
	$-1$			$1$	$9$	

SCE-5868 Denis F. Wolf 22

GraphSLAM - Implementação

$\Omega$					$\xi$	$X_2 = X_1 - 1$
$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$L_0$	$X_0$	
$2$	$-1$				$-3$	$X_1 - X_2 = +1$
$-1$	$2+1$	$-1$		$-1$	$-4+1$	$X_2 - X_1 = -1$
		$-1$	$+1$		$-1$	
	$-1$			$1$	$9$	

SCE-5868 Denis F. Wolf 23

GraphSLAM - Implementação

$\Omega$					$\xi$	$X_2 = X_1 - 1$
$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$L_0$	$X_0$	
$2$	$-1$				$-3$	$X_1 - X_2 = +1$
$-1$	$3$	$-1$		$-1$	$-3$	$X_2 - X_1 = -1$
		$-1$	$1$		$-1$	
	$-1$			$1$	$9$	

SCE-5868 Denis F. Wolf 24

GraphSLAM - Implementação

$$\Omega \quad \xi \quad X_3 = X_2 + 4$$

	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$L_0$		$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$L_0$
$X_0$	2	-1				$X_0$	-3				
$X_1$	-1	3	-1		-1	$X_1$	-3				
$X_2$		-1	1+1	-1		$X_2$	-1-4				
$X_3$			-1	1+1		$X_3$	+4				
$L_0$		-1			1	$L_0$	9				

$X_2 - X_3 = -4$   
 $X_3 - X_2 = 4$

SCE-5868 Denis F. Wolf 25

GraphSLAM - Implementação

$$\Omega \quad \xi \quad X_3 = X_2 + 4$$

	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$L_0$		$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$L_0$
$X_0$	2	-1				$X_0$	-3				
$X_1$	-1	3	-1		-1	$X_1$	-3				
$X_2$		-1	2	-1		$X_2$	-5				
$X_3$			-1	1		$X_3$	4				
$L_0$		-1			1	$L_0$	9				

$X_2 - X_3 = -4$   
 $X_3 - X_2 = 4$

SCE-5868 Denis F. Wolf 26

GraphSLAM - Implementação

$$\Omega \quad \xi \quad L_0 = X_3 + 6$$

	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$L_0$		$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$L_0$
$X_0$	2	-1				$X_0$	-3				
$X_1$	-1	3	-1		-1	$X_1$	-3				
$X_2$		-1	2	-1		$X_2$	-5				
$X_3$			-1	1+1	-1	$X_3$	4-6				
$L_0$		-1		-1	1+1	$L_0$	9+6				

$X_3 - L_0 = -6$   
 $L_0 - X_3 = 6$

SCE-5868 Denis F. Wolf 27

GraphSLAM - Implementação

$$\Omega \quad \xi \quad L_0 = X_3 + 6$$

	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$L_0$		$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$L_0$
$X_0$	2	-1				$X_0$	-3				
$X_1$	-1	3	-1		-1	$X_1$	-3				
$X_2$		-1	2	-1		$X_2$	-5				
$X_3$			-1	2	-1	$X_3$	-2				
$L_0$		-1		-1	2	$L_0$	15				

$X_3 - L_0 = -6$   
 $L_0 - X_3 = 6$

SCE-5868 Denis F. Wolf 28

GraphSLAM - Implementação

Solução:

$$\Sigma = \Omega^{-1}$$

$$\mu = \Omega^{-1} \cdot \xi$$

SCE-5868 Denis F. Wolf 29

GraphSLAM - Implementação

Solução:

$$\Sigma = \Omega^{-1}$$

$$\mu = \Omega^{-1} \cdot \xi$$

	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$L_0$
	2	7	6	10	16

SCE-5868 Denis F. Wolf 30

### GraphSLAM – Implementação

Solução:

$$\Sigma = \Omega^{-1} \quad \mu = \Omega^{-1} \cdot \xi$$

	X <sub>0</sub>	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	L <sub>0</sub>
X <sub>0</sub>	1	1	1	1	1
X <sub>1</sub>	1	2	2	2	2
X <sub>2</sub>	1	2	2.75	2.5	2.25
X <sub>3</sub>	1	2	2.5	3	2.5
L <sub>0</sub>	1	2	2.25	2.5	2.75

SCE-5868 Denis F. Wolf 31

### Rao-blackwellized Particle Filter (FastSLAM)

**Idéia básica: utilizar um filtro de partículas para estimar a posição do robô e o mapa do ambiente.**

- Vantagens:**
  - Modelos de percepção e controle não-lineares ☹
  - Permite diferentes associações de dados em paralelo ☹
  - Estima toda a trajetória do robô on-line ☹
- Desvantagem:**
  - Número de partículas necessário cresce exponencialmente com o número de variáveis. ☹☹☹

SCE-5868 Denis F. Wolf 32

### Rao-blackwellized Particle Filter

Como simplificar o problema:  
Existe alguma dependência entre as variáveis?

O mapa depende da posição do robô!

SCE-5868 Denis F. Wolf 33

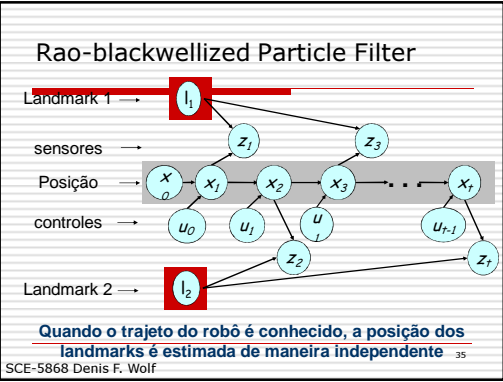
### Rao-blackwellized Particle Filter

posição mapa sensores & controle

$$p(x_{1:t}, l_{1:m} | z_{1:t}, u_{0:t-1}) = p(x_{1:t} | z_{1:t}, u_{0:t-1}) \cdot p(l_{1:m} | x_{1:t}, z_{1:t})$$

Fatorização apresentada originalmente por Murphy em 1999

SCE-5868 Denis F. Wolf 34



### Fatoração do mapeamento

$$p(x_{1:t}, l_{1:m} | z_{1:t}, u_{0:t-1}) = p(x_{1:t} | z_{1:t}, u_{0:t-1}) \cdot p(l_{1:m} | x_{1:t}, z_{1:t}) = p(x_{1:t} | z_{1:t}, u_{0:t-1}) \cdot \prod_{i=1}^M p(l_i | x_{1:t}, z_{1:t})$$

Localização

Posições dos landmarks condicionalmente independentes

SCE-5868 Denis F. Wolf 36

### FastSLAM

- Rao-Blackwellized particle filtering baseado em landmarks [Montemerlo et al., 2002]
- Cada landmark é representado por um 2x2 Extended Kalman Filter (EKF)
- Cada partícula mantém  $M$  EKFs

Particle #1	$x, y, \theta$	Landmark 1	Landmark 2	...	Landmark M
Particle #2	$x, y, \theta$	Landmark 1	Landmark 2	...	Landmark M
⋮					
Particle N	$x, y, \theta$	Landmark 1	Landmark 2	...	Landmark M

### FastSLAM – Action Update

SCE-5868 Denis F. Wolf 38

### FastSLAM – Sensor Update

SCE-5868 Denis F. Wolf 39

### FastSLAM – Sensor Update

SCE-5868 Denis F. Wolf 40

### Rao-blackwellized Particle Filter

[Video: SLAM com câmera stereo](#)

SCE-5868 Denis F. Wolf 41

### Problema: associação de dados

Qual observação corresponde a qual landmark?

- Possíveis associações dependem da posição do robô.
- Soluções robustas para o SLAM devem considerar várias associações possíveis.

SCE-5868 Denis F. Wolf 42

### Rao-blackwellized Particle Filter

The diagram illustrates a Rao-Blackwellized Particle Filter. It shows a set of particles (represented by small circles) moving through a 2D environment. Several landmarks are marked with green stars. A curved line represents the robot's path. The filter maintains a set of particles, each representing a hypothesis of the robot's position and orientation.

SCE-5868 Denis F. Wolf 43

### Associação de dados

The diagram shows a 2D grid with a robot's position indicated by a green circle. Two overlapping ellipses represent the sensor's field of view. One ellipse is red and contains a red landmark. The other is blue and contains a blue landmark. The text asks: "A observação foi gerada pelo landmark vermelho ou pelo azul?" (Was the observation generated by the red or blue landmark?).

$P(\text{observation}|\text{red}) = 0.3$       $P(\text{observation}|\text{blue}) = 0.7$

- Duas opções para a associação:
  - Associar ao mais provável
  - Associação aleatória utilizando o peso proporcional a probabilidade
- Se a probabilidade de associação é muito pequena, gerar um novo landmark.

SCE-5868 Denis F. Wolf 44

### Results – Data Association

The graph compares the Root Mean Square (RMS) Position Error (in meters) for FastSLAM and EKF as a function of the Error Added to Rotational Velocity (in standard deviations). The x-axis ranges from 0 to 0.2, and the y-axis ranges from 0 to 70. FastSLAM (blue line) maintains a low, stable error (around 5-10m), while EKF (red dashed line) shows a significant increase in error as rotational ambiguity increases, reaching approximately 60m at 0.2 std.

SCE-5868 Denis F. Wolf 45

### Results – Accuracy

The graph shows the RMS Pose Error (in meters) versus the Number of Particles. The x-axis is logarithmic, ranging from  $10^1$  to  $10^3$ . The y-axis ranges from 0 to 25. FastSLAM (blue line) shows a sharp decrease in error as the number of particles increases, reaching near-zero error by  $10^2$  particles. EKF (red dashed line) maintains a very low, constant error across the range of particles.

SCE-5868 Denis F. Wolf 46

### Rao-blackwellized Particle Filter

posição mapa    sensores & controle

$$p(x_{1:t}, m | z_{1:t}, u_{0:t-1}) = p(x_{1:t} | z_{1:t}, u_{0:t-1}) \cdot p(m | x_{1:t}, z_{1:t})$$

occupancy grid

The diagram illustrates the Rao-Blackwellized Particle Filter equation. The variables are defined as follows: "posição mapa" (map position) points to  $x_{1:t}$ ; "sensores & controle" (sensors & control) points to  $z_{1:t}, u_{0:t-1}$ ; and "occupancy grid" points to  $m$ .

SCE-5868 Denis F. Wolf 47

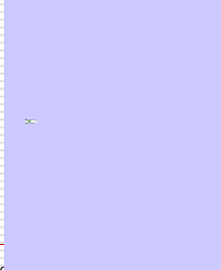
### Exemplo utilizando mapa métrico

The diagram shows three particles (1, 2, and 3) and their corresponding metric maps. Each map is a 2D grid with a robot's path and landmarks. The maps are connected by lines, indicating the relationship between the particles and their respective maps. A central box labeled "3 particles" contains three green dots representing the particles.

SCE-5868 Denis F. Wolf 48

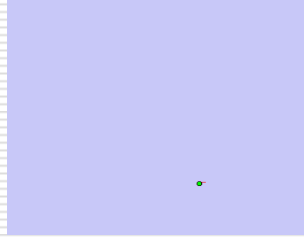


## Rao-blackwellized Particle Filter



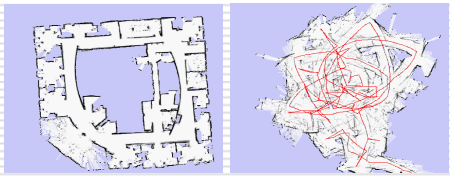
SCE-5868 Denis F. Wolf 49

## Rao-blackwellized Particle Filter



SCE-5868 Denis F. Wolf 50

## Rao-blackwellized Particle Filter



RB Particle Filter Odometria

SCE-5868 Denis F. Wolf 51

## Rao-blackwellized Particle Filter

**Resumo:**

- ❑ Cada partícula representa uma trajetória do robô, juntamente com o respectivo mapa gerado.
- ❑ Decompõe o mapa em várias distribuições normais de poucas dimensões ao invés de uma única distribuição com várias dimensões.
- ❑ Resolve ambos os problemas de on-line SLAM e full SLAM.

SCE-5868 Denis F. Wolf 52