UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DE COMPUTAÇÃO
Departamento de Ciências de Computação
http://www.icmc.usp.br

SCC-505 - Capítulo 3 Linguagens Sensíveis ao Contexto e Autômatos Limitados Linearmente

João Luís Garcia Rosa[1]

[1]Departamento de Ciências de Computação
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - Universidade de São Paulo
http://www.icmc.usp.br/~joaoluis

2010

Sumário

Sumário

Definição

- Como uma generalização das regras livres de contexto, introduz-se agora regras sensíveis ao contexto que também especificam a substituição de um símbolo não terminal, mas requer um contexto para aplicação.
- Portanto a regra $bC \to bc$ é *sensível ao contexto* porque ela diz que um não terminal C pode ser substituído pelo símbolo terminal c apenas no contexto de um b precedente.
- **Definição**: Uma gramática G é **sensível ao contexto** se cada produção ou é da forma
    1. $yAz \to ywz$, para $A \in V$, $y, z \in (V \cup \Sigma)^*$, $w \in (V \cup \Sigma)^+$; ou
    2. $S \to \lambda$, dado que S não aparece no lado direito de nenhuma produção.
- Uma linguagem é sensível ao contexto se pode ser gerada por uma gramática sensível ao contexto.

Exemplo de GSC

- **Fato**: Seja G uma gramática tal que toda produção de G é da forma $v \to w$, com $|v| \leq |w|$, exceto que pode existir uma única produção-λ $S \to \lambda$ se S não aparece do lado direito de nenhuma produção. Então, existe uma gramática sensível ao contexto G' que é equivalente a G: $L(G) = L(G')$ [1].
- **Exemplo** de Gramática Sensível ao Contexto:
  - $G = (\Sigma, V, S, P)$, $\Sigma = \{a, b\}$, $V = \{S, B, C\}$ e $P = \{$
    1. $S \to aSBC$,
    2. $S \to aBC$,
    3. $CB \to BC$,
    4. $aB \to ab$,
    5. $bB \to bb$,
    6. $bC \to bc$,
    7. $cC \to cc\}$

Exemplo de GSC

- A linguagem $L(G)$ contém a palavra $a^n b^n c^n$ para cada $n \geq 1$, pois pode-se usar a produção (1) $n - 1$ vezes para chegar a $S \Rightarrow^* a^{n-1} S (BC)^{n-1}$. Depois usa-se a (2) para $S \Rightarrow^* a^n (BC)^n$. A produção (3) permite arranjar os Bs e Cs tal que todo B preceda todos os Cs. Por exemplo, se $n = 3$:
$$aaaBCBCBC \Rightarrow aaaBBCCBC \Rightarrow aaaBBCBCC \Rightarrow aaaBBBCCC$$
- Portanto, $S \Rightarrow^* a^n B^n C^n$. Depois usa-se (4) uma vez para chegar a $S \Rightarrow^* a^n b B^{n-1} C^n$. Aí usa-se a produção (5) $n - 1$ vezes: $S \Rightarrow^* a^n b^n C^n$. Finalmente, usa-se a produção (6) uma vez e a produção (7) $n - 1$ vezes para chegar a $S \Rightarrow^* a^n b^n c^n$. É necessário mostrar também que as cadeias $a^n b^n c^n$, $n \geq 1$, são as únicas cadeias terminais em $L(G)$.

Sumário

Lema da Cadeia Vazia

- Note que nem toda gramática livre de contexto é sensível ao contexto, porque as produções livres de contexto podem ser da forma $A \to \lambda$. Entretanto, toda linguagem livre de contexto é uma linguagem sensível ao contexto.
- **Lema**: (**O Lema da Cadeia Vazia**). Seja G uma gramática livre de contexto que envolve regras da forma $A \to \lambda$ para qualquer $A \in V$. Então existe uma gramática livre de contexto G' tal que
  1. $L(G) = L(G')$;
  2. Se $\lambda \notin L(G)$ então não existem produções da forma $A \to \lambda$ em G'; mas
  3. Se $\lambda \in L(G)$, então existe uma única produção-λ em G', $S' \to \lambda$, onde S' é o símbolo inicial de G' e S' não aparece no lado direito de nenhuma produção em G'.

Lema da Cadeia Vazia: Prova

- **PROVA**: Suponha que $\lambda \notin L(G)$. Para $C \in V$ considere todas as produções $C \to w$, onde w não é vazio. Agora suponha que w contém variáveis $A_1, ..., A_k, B_1, ..., B_j$ onde A_i, $1 \leq i < k$, são aquelas variáveis em w para as quais $A_i \Rightarrow^* \lambda$. Adicione a G a produção $C \to w'$, onde w' é obtida de w apagando zero ou mais ocorrências de uma variável dos A_i's. Então, por exemplo,

$$C \to aA_1BA_2$$

leva a quatro produções

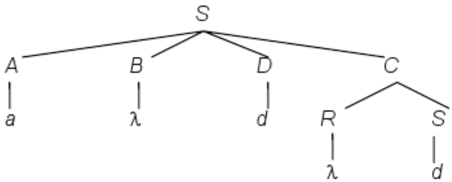
$$C \to aA_1BA_2 \mid aBA_2 \mid aA_1B \mid aB$$

Quando este processo estiver completo, remova todas as produções-λ, incluindo qualquer produção-λ nova que tenha sido incluída no processo. A gramática resultante é G'. Então $L(G) = L(G')$ como se segue.

Lema da Cadeia Vazia: Prova

- Se uma derivação de alguma cadeia $w \in L(G)$ envolveu produções-λ, então a árvore de derivação para w terá nós rotulados com λ, como no seguinte exemplo.

$S \rightarrow ABDC$
$C \rightarrow RS$
$B \rightarrow \lambda$
$A \rightarrow a$
$D \rightarrow d$
$R \rightarrow \lambda$
$S \rightarrow d$



- Para obter uma derivação G' para w a partir de uma derivação G para w, comece no topo da árvore G e apague qualquer sub-árvore da raiz da árvore que deriva λ. O topo da árvore deve agora ilustrar uma produção a partir de G'.

Lema da Cadeia Vazia: Prova

- Então considere os sucessores imediatos do nó raiz que não derivam λ. Aplique o mesmo princípio a cada um deles: se alguma das suas sub-árvores deriva λ, apague a sub-árvore. Continue desta forma para baixo na árvore. A árvore final representa uma derivação G'. Além disto, esta árvore deriva w, porque uma subcadeia de w é removida pelo processo de apagamento se e somente se ela for λ. Por outro lado, se $w \in L(G')$ e a derivação de w envolve uma regra recém adicionada, então simule a derivação de G' usando a regra G original apropriada e regras-λ. Isto é, faça o processo descrito acima na ordem reversa, novamente de cima para baixo.

Lema da Cadeia Vazia

- No caso onde $\lambda \in L(G)$, primeiro adicione um novo símbolo inicial a G', por exemplo S', e adicione duas novas produções, $S' \rightarrow S$ e $S' \rightarrow \lambda$. Depois repita o processo descrito previamente em todas as produções exceto as produções S'. Então $L(G) = L(G')$.

- **Teorema**: Uma linguagem L é *sensível ao contexto* se e somente se existe alguma gramática G tal que $L = L(G)$ onde toda produção de G da forma $u \rightarrow v$ tem a propriedade de que $0 < |u| \leq |v|$ com uma exceção: se $\lambda \in L(G)$, então a regra $S \rightarrow \lambda$ está também presente e neste caso S não pode aparecer no lado direito de nenhuma produção.

Sumário

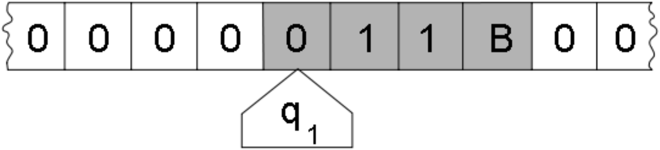
Máquina de Turing

- Vai-se relacionar agora a teoria das linguagens formais com a teoria abstrata da computação.
- Como se pode caracterizar o conjunto de funções computadas por programas de computador?
- Esta questão - quais funções são realizáveis por algoritmos e quais não são? - tem suas raízes mais diretas no trabalho de Alan Turing nos anos 1930 [6].
- Usando, o que agora se chama de modelo de máquina de Turing, Turing mostrou que certos problemas naturais em computação não podem ser computados por nenhum algoritmo, real ou imaginado.

Máquina de Turing: Definição

- Uma máquina de Turing T pode ser descrita (Figura 10) como um controle de estados finitos equipado com um dispositivo de armazenamento externo na forma de uma fita finita que pode ser estendida indefinidamente em ambas as direções.

Figure: Uma máquina de Turing: A fita pode ser estendida indefinidamente pela adição de B's (brancos) em qualquer lado [7].



Máquina de Turing: Exemplo

- **Exemplo** : A seguinte máquina de Turing aceita o conjunto $\{a^{2n} | n \geq 0\}$ de cadeias de comprimento par de *a*'s: quando começa no estado "par" no *a* mais a esquerda, com a configuração de fita inicial *Baaa...aaaB* ela irá terminar no estado "aceitação" apenas no caso do número de *a*'s ser par. Aqui está a máquina:

  (par *a* ímpar *B* *R*)
  (ímpar *a* par *B* *R*)
  (par *B* aceitação *B* *R*)

- Quando ela alcança primeiro um *B* ela muda para o estado "aceitação" se ela viu um número par (incluindo 0) de *a*'s mas de outra forma ela irá parar porque não há quíntupla para guiar seu próximo movimento.

Máquina de Turing: Exemplo

- Por outro lado, a máquina com quíntuplas:

$$(\text{par } a \text{ ímpar } B\ R)$$
$$(\text{ímpar } a \text{ par } B\ R)$$
$$(\text{par } B \text{ aceitação } B\ R)$$
$$(\text{ímpar } B \text{ ímpar } B\ R)$$

- tem a propriedade de que em cadeias de comprimento par de *a*'s ela para no estado de aceitação, mas em cadeias de comprimento ímpar ela "roda" para sempre.
- Isto ilustra como as máquinas de Turing são realmente diferentes dos Autômatos Finitos (AFDs).
- Em particular, as computações da máquina de Turing podem fornecer resultados indefinidos - computações que nunca terminam.
- Tal comportamento não é possível com AFDs.

Máquina de Turing

- Assim como com os AFDs, pode-se dar uma representação equivalente das quíntuplas no Exemplo 4 usando uma tabela de estado, como se segue:

estado atual	símbolo	percorrido
	a	B
par	ímpar B R	aceitação B R
ímpar	par B R	

- A fim de tornar o comportamento da máquina determinístico, necessita-se que quando duas quíntuplas têm a mesma combinação (estado atual, símbolo percorrido), então as duas quíntuplas são idênticas.
- Veja agora a definição formal de uma máquina de Turing e a linguagem que ela aceita.

Máquina de Turing: Definição

- **Definição**: Uma máquina de Turing M é uma quíntupla $M = (Q, \Sigma, q_0, q_a, \delta)$, onde
  1. Q é um conjunto finito de estados;
  2. Σ é um alfabeto finito da fita. Escreve-se $\Sigma' = \Sigma \cup \{B, \cdots\}$ para Σ aumentado pelo símbolo de fita B, o símbolo branco, e por outros símbolos usados para marcação na fita (escrita);
  3. q_0 é o estado inicial distinto;
  4. q_a é o estado de aceitação distinto;
  5. δ é a função (parcial) de transição de estado,
     $$\delta : Q \times \Sigma' \to Q \times \Sigma' \times \{L, R, S\}$$
     sujeita a condição de que $\delta(q_a, x)$ não é definida para nenhum x em Σ'. Pode-se representar δ por uma lista de quíntuplas, com $(q\ x\ q'\ x'\ D)$ na lista apenas no caso em que $\delta(q, x) = (q', x', D)$.

Máquina de Turing: Descrição Instantânea

- Pode-se descrever a configuração de uma máquina de Turing M especificando:
  1. a cadeia w_1 impressa na fita a esquerda da cabeça de leitura/escrita;
  2. o estado corrente q; e
  3. a cadeia w_2 impressa na fita a direita da cabeça de leitura/escrita, com a máquina correntemente lendo o símbolo mais à esquerda de w_2.
- Pode-se resumir isto na cadeia
$$w_1 q w_2$$
que é chamada de **descrição instantânea** (DI) de M.
- Note que w_1 e w_2 não são únicos - a cadeia $w_1 w_2$ deve conter todos os quadrados não brancos da fita de M, mas ela pode ser estendida adicionando brancos em qualquer lado: $1q_0 1B11$ e $BB1q_0 1B11BBB$ são duas formas de escrever a mesma DI.

Máquina de Turing

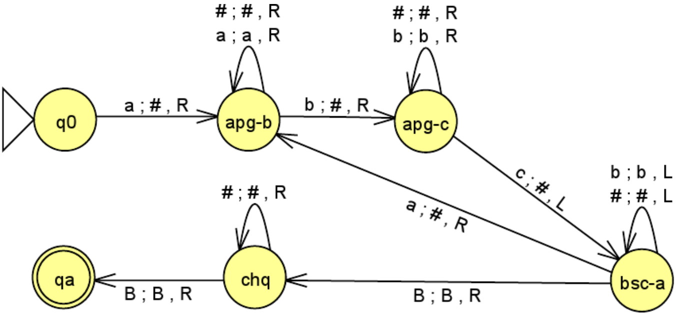
- Para uma máquina de Turing M sobre o alfabeto Σ, define-se $T(M)$, o conjunto aceitação de M, como o conjunto das cadeias w sobre Σ tal que se w é escrita em uma fita em branco e M começa processando no estado q_0 no símbolo mais a esquerda de w, então M finalmente para no estado de aceitação. Formalmente:
- **Definição**: O conjunto de aceitação $T(M)$ de uma máquina de Turing M sobre o alfabeto Σ é o conjunto

$$T(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists\, w_1, w_2 \in (\Sigma')^* \mid q_0 w \Rightarrow^* w_1 q_a w_2\}.$$

Máquina de Turing: Exemplo

- **Exemplo**: A seguinte máquina de Turing aceita a linguagem $\{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$:

Figure: Uma máquina de Turing para processar a linguagem $\{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$.



Sumário

ALL: Definição

- **Definição**: Um autômato limitado linearmente (ALL) é uma máquina de Turing não determinística que deve operar dentro de um espaço delimitado na fita, a esquerda por um símbolo $ e a direita por um ¢. Assume-se que estes símbolos são não apagáveis e que a cabeça não pode mover sobre eles.
- Estas máquinas são precisamente os aceitadores das linguagens sensíveis ao contexto.

Bibliografia I

[1] Chomsky, N.
On Certain Formal Properties of Grammars.
Information and Control, 2, 1959, pp. 137–167.

[2] Hopcroft, J. E., Ullman, J. D.
Formal Languages and Their Relation to Automata.
Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[3] Hopcroft, J. E., Ullman, J. D. e Motwani, R.
Introdução à Teoria de Autômatos, Linguagens e Computação.
Tradução da segunda edição americana. Editora Campus, 2003.

Bibliografia II

[4] Moll, R. N., Arbib, M. A., and Kfoury, A. J.
An Introduction to Formal Language Theory.
Springer-Verlag, 1988.

[5] Rosa, J. L. G.
Linguagens Formais e Autômatos.
Editora LTC. Rio de Janeiro, 2010.

[6] Turing, A.M.
On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem.
Proceedings of the London Mathematical Society, 2 42: 230-65, 1937.

[7] Wikipedia - The Free Encyclopedia.
http://en.wikipedia.org/wiki/Turing_machine