



# Cálculo Numérico / Métodos Numéricos

Sistemas lineares

Métodos Iterativos: Introdução

# Métodos exatos

- Métodos como:

- Método de eliminação de Gauss
- Método de decomposição LU
- Método de Cholesky

são ditos exatos: obtém a solução final após um número  $k$  de passos.

- Em alguns casos/aspectos, métodos iterativos têm algumas vantagens.

- são melhores em matrizes esparsas
- apresentam auto-correção de erros (podem ser usados para melhorar a solução obtida por métodos exatos).

# Idéia geral

- Similar à idéia dos método iterativo linear para resolução de equações.

Queremos resolver:  $Ax = b$

E reescrevemos o sistema como:

$$x = Bx + g$$

( $B = I - A$ ,  $g = b$ , por exemplo)

# Idéia geral

- De posse de  $x = Bx + g$ :
  - Chutamos um valor inicial para  $x$ :  $x^{(0)}$ .
  - Obtemos:
    - $x^{(1)} = Bx^{(0)} + g.$
    - $x^{(2)} = Bx^{(1)} + g.$
    - $x^{(3)} = Bx^{(2)} + g.$
    - ...
    - $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g.$

Da mesma forma como fazíamos:

$$x_{k+1} = \psi(x_k)$$

# Convergência

- A seqüência converge ?
- Critério: A seqüência será convergente se, para **qualquer norma de matrizes**,  $\|B\| < 1$ .
- Demonstração:

$$e^{(k)} = x - x^{(k)}$$

$$\text{Mas } x = Bx + g \quad (5.1)$$

$$x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + g \quad (5.2)$$

$$\text{Logo: } e^{(k)} = B(x - x^{(k-1)}) = B e^{(k-1)}$$

# Convergência

$$e^{(k)} = B(x - x^{(k-1)}) = B e^{(k-1)}$$

Como fizemos antes para mostrar a convergência do método iterativo linear:

$$e^{(k)} = B e^{(k-1)}$$

$$e^{(k-1)} = B e^{(k-2)}$$

Logo:  $e^{(k)} = B^2 e^{(k-2)}$

E, se aplicamos sucessivamente:

$$e^{(k)} = B^k e^{(0)}$$

# Convergência

$$e^{(k)} = B^k e^{(0)}$$

Usando normas consistentes (def. 1.14 do livro):

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \text{ e logo,}$$

$$\|e^{(k)}\| \leq \|B^k\| \cdot \|e^{(0)}\|$$

Que tende a zero quando  $\|B\| < 1$ .

Note a semelhança com o método iterativo linear:

$B$  é chamada a **matriz de iteração** do processo iterativo

# Conclusão

Condição suficiente:

O sistema é convergente se, para uma norma qualquer de matrizes,  $\|B\| < 1$ .

Uma condição **necessária e suficiente**:

$\max |\lambda_i| < 1$ , onde  $\lambda_i$  são os autovalores de  $B$

Por hora, vamos nos preocupar com a condição suficiente. Depois veremos como calcular os autovalores de  $B$ .



# Algumas normas convergentes

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad \text{norma linha}$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad \text{norma coluna}$$

$$\|A\|_E = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2} \quad \text{norma Euclidiana}$$

## ■ Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_{\infty} = |6| + |3| + |4| = 13$$

$$\|A\|_1 = |3| + |6| + |-1| = 10$$

$$\|A\|_E = (9 + 4 + 1 + 36 + 9 + 16 + 1 + 4 + 1)^{1/2} = 9$$

## Exemplo (convergência)

$$B = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.6 & 0.4 \\ -0.3 & 0.1 & 0.0 \end{pmatrix}$$

Um sistema  $Ax=b$  que seja reescrito na forma:

$$x = Bx + g$$

Ir  convergir quando o método iterativo for aplicado ?

$\| B \|_{\infty} = 1.2$       Não podemos concluir... tentemos outra norma:

$\| B \|_1 = 0.9 < 1$       **Convergência garantida!**