ORDENAÇÃO

- **Ordenar** é o processo de organizar uma lista de informações similares em ordem crescente ou decrescente. Especificamente, dada uma lista de n itens $r[0]$, $r[1]$, $r[2]$, ..., $r[n-1]$, cada item na lista é chamado **registro**. Uma **chave**, $k[i]$, é associada a cada registro $r[i]$. Diz-se que a lista está **ordenada pela chave** se i precede j implicar que $k[i] < k[j]$ (ou $k[i] > k[j]$) em alguma ordenação nas chaves

1. ORDENAÇÃO POR TROCA

1.1 Ordenação por Bolha

- Em cada um dos exemplos subseqüentes, x é um vetor de inteiros do qual os primeiros n devem ser ordenados de modo que $x[i] \leq x[j]$ para $0 \leq i < j <$ n.
- A idéia básica por trás da ordenação por bolha é percorrer a lista seqüencialmente varias vezes. Cada passagem consiste em comparar cada elemento na lista com seu sucessor ($x[i]$ com $x[i+1]$) e trocar os dois elementos se ele não estiverem na ordem correta

Exemplo, 25, 57, 48, 37, 12, 92, 86, 33

Primeira Passagem

x[0] com x[1]	(25 com 57)	nenhuma troca
x[1] com x[2]	(57 com 48)	troca
x[2] com x[3]	(57 com 37)	troca
x[3] com x[4]	(57 com 12)	troca
x[4] com x[5]	(57 com 92)	nenhuma troca
x[5] com x[6]	(92 com 86)	troca
x[6] com x[7]	(92 com 33)	troca

Observe que, depois da primeira passagem, o maior elemento está em sua posição correta. Em geral $x[n-i]$ ficara na posição correta depois da iteração i.

25, 57, 48, 37, 12, 92, 86, 33

O conjunto completo de iterações fica assim:

iteração 0	25 57 48 37 12 92 86 33
iteração 1	25 48 37 12 57 86 33 92
iteração 2	25 37 12 48 57 33 86 92
iteração 3	25 12 37 48 33 57 86 92
iteração 4	12 25 37 33 48 57 86 92
iteração 5	12 25 33 37 48 57 86 92
iteração 6	12 25 33 37 48 57 86 92
iteração 7	12 25 33 37 48 57 86 92

Algoritmo

```
bubble (int x[ ], int n)
{
   int j, pass;
   bool switched = true;

   for (pass = 0; pass < n-1 && switched; pass++){    /*repetição externa,
                                                        controla nº de passagens*/
       switched = false;
       for (j = 0; j < n - pass - 1; j++){       /*repetição interna, controla cada
                                                   passagem individual*/
           if (x[j] > x[j+1]){        /*elemento fora da ordem é necessária uma troca*/
               switched = true;
               troca(x[j], x[j+1]);
           }
       }
   }
}
```

Complexidade de Tempo

- Sem o aprimoramento
  - Numero de comparações: $n(n-1)/2$
  - Numero de trocas: melhor caso: nenhuma
  - pior caso: $n(n-1)/2$
- Com o aprimoramento
  - Numero de comparações será $(n-1) + (n-2) + ... + (n-k) = (2kn-k^2-k)/2$
  - Como $k = O(n)$, então, o aprimoramento não muda a complexidade de tempo do algoritmo
- Conclusão final: A complexidade do algoritmo de ordenação por bolha = $O(n^2)$

1.2 QuickSort

A ordenação por troca de partição ou quicksort é provavelmente o algoritmo de ordenação mais utilizado.

Idéia Básica

- Quicksort trabalha particionando um vetor em duas partes e então as ordenando separadamente. Especificamente, seja *x* um vetor e *n* o numero de elementos no vetor a ser classificados. Escolha um elemento *a* numa posição especifica dentro do vetor, digamos a posição *j*. Os elementos de *x* são particionados de modo que *a* é colocado na posição *j* e as seguintes condições são observadas:
  1. Cada elemento nas posições 0 até *j*-1 são menor ou igual a *a*.
  2. Cada elemento nas posições *j*+1 até *n* -1 são maior que a *a*.
- O mesmo processo é repetido com os subvetores *x*[0] até *x*[*j*-1] e *x*[*j*+1] até *x*[*n*-1] e com quaisquer vetores criados pelo processo em sucessivas iterações, o resultado final será uma lista ordenada.

Algoritmo Básico

```
quicksort (int x[], int: lb, ub)
{
      int i;

      if (lb > ub) return;
       j = partition(x, lb, ub);
      quicksort(x, lb, j-1);
      quicksort(x, j+1, ub);
}
```

- Os parâmetros *lb* e *ub* delimitam os sub-vetores dentro do vetor original, dentro dos quais a ordenação ocorre.
- A chamada inicial pode ser feita com quicksort(*x*, 0, *n*-1);
- O ponto crucial é o algoritmo de partição.

Exemplo:

Ordenação do vetor inicial 25 57 48 37 12 92 86 33.

Suponhamos que o primeiro elemento (25) é escolhido para colocar na sua posição correta, teremos:

12 25 57 48 37 92 86 33.

Como 25 está na sua posição final, o problema foi decomposto na ordenação dos subvetores:

(12) e (57 48 37 92 86 33).

O subvetor (12) já está classificado. Repetir o processo para *x*[2]...*x*[7] resulta em:

12 25 (48 37 33) 57 (92 86)

Exemplo:

Se continuarmos particionando 12 25 (48 37 33) 57 (92 86), teremos:

12 25 (37 33) 48 57 (92 86)

12 25 (33) 37 48 57 (92 86)

12 25 33 37 48 57 (92 86)

12 25 33 37 48 57 (86) 92

12 25 33 37 48 57 86 92

Método de Particionamento

Considere *a* = *x*[*lb*] como o elemento cuja posição final é a procurada.

Dois ponteiros *up* e *down* são inicializados como os limites máximo e mínimo do subvetor que vamos analisar. Em qualquer ponto da execução, todo elemento acima de *up* é maior do que *a* e todo elemento abaixo de *down* é menor ou igual a *a*.

Os dois ponteiros *up* e *down* são movidos um em direção ao outro da seguinte forma:

1. Incremente *down* em uma posição até que $x[down] > a$.
2. Decremente *up* em uma posição até que $x[up] \leq a$.
3. Se a $up > down$, troque $x[down]$ por $x[up]$.

O processo é repetido até que a condição descrita em 3. falhe (quando $up \leq down$). Neste ponto $x[up]$ será trocado por $x[lb]$, cuja posição final era procurada, e *up* é retornado em *j*.

Exemplo: $a = 25$

```
down-->                                   up
  25    57    48    37    12    92    86    33
        down                              <--up
  25    57    48    37    12    92    86    33
        down                        <--up
  25    57    48    37    12    92    86    33
        down                  <--up
  25    57    48    37    12    92    86    33
        down            up
  25    57    48    37    12    92    86    33
        down            up
  25    12    48    37    57    92    86    33
```

```
      down-->           up
  25    12    48    37    57    92    86    33
              down      up
  25    12    48    37    57    92    86    33
              down    <--up
  25    12    48    37    57    92    86    33
              down <--up
  25    12    48    37    57    92    86    33
           <--up  down
  25    12    48    37    57    92    86    33
        up    down
  25    12    48    37    57    92    86    33
        up    down
  12    25    48    37    57    92    86    33
```

Algoritmo de Particionamento

```
int partition(int x[], int: lb, ub)
{
    int a, down, up;

    a = x[lb];
    up = ub; down = lb;
    while (down < up) {
        while (x[down] <= a && down < ub)
            down++;
        while (x[up] > a)
            up--;
        if (down < up)
            swap(x[down], x[up]);
    }
    x[lb] = x[up];
    x[up] = a;
    return up;
}
```

Eficiência do Quicksort

O tempo de execução do QuickSort depende se o particionamento é balanceado ou não.

1. **O pior caso** do QuickSort ocorre quando o particionamento gera um conjunto com 1 elemento e outro com n-1 elementos para todos os passos do algoritmo. Desde que o particionamento custa $O(n)$ a recorrência neste caso torna-se

   $$T(n) = T(n-1) + O(n)$$

   como $T(1) = O(1)$, não é difícil mostrar que $T(n) = O(n^2)$.

   $(T(n) = \alpha n + T(n-1) = \alpha n + \alpha(n-1) + \alpha(n-2) + ... + \alpha 2 + T(1))$

2. **O melhor caso** ocorre quando o particionamento sempre gera dois sub-conjuntos de tamanho $n/2$, temos a recorrência

   $$T(n) = 2T(n/2) + O(n)$$

   Então, $T(n) = O(n\log n)$.

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \alpha n$$
$$= 2\left(2T\left(\frac{n}{4}\right) + \alpha\frac{n}{2}\right) + \alpha n = 2^2 T\left(\frac{n}{4}\right) + \alpha n + \alpha n$$
$$= 2^2\left(2T\left(\frac{n}{8}\right) + \alpha\frac{n}{4}\right) + \alpha n + \alpha n 2 = 2^3 T\left(\frac{n}{8}\right) + \alpha n + \alpha n + \alpha n$$
$$= 2^{\log n} T(1) + \underbrace{\alpha n + \ldots + \alpha n}_{\log n}$$
$$= 2^{\log n} + \alpha n \log n$$
$$= O(n \log n)$$

$$\frac{n}{2^m} = 1$$
$$m = \log n$$

$$2^{\log n} < n \log n$$
$$\log 2^{\log n} < \log(n \log n)$$
$$\log n < \log n + \log(\log n)$$

3. Caso Médio.

O algoritmo *partition* leva tempo proporcional ao n, denotado αn. Suponhamos que a lista é separada em duas sublistas de comprimento k e n -1-k, respectivamente. Então, temos

$$T(n) = \alpha\, n + T(k) + T(n - 1 - k)$$

Mas, não sabemos o valor exato do k. Portanto, calculamos a media de todas possibilidades de k:

$$T(n) = \alpha\, n + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(T(k) + T(n-1-k)\right)$$

Isso pode ser simplificado para: (Porquê ?)

$$T(n) = \alpha n + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1} T(k)$$

$$\frac{n}{2}\left(T(n) - \alpha n\right) = T(0) + T(1) + \ldots + T(n-1)$$
$$\frac{n+1}{2}\left(T(n+1) - \alpha(n+1)\right) = T(0) + T(1) + \ldots + T(n-1) + T(n)$$

Substrai as duas formulas e rearranja:

$$\frac{T(n+1)}{n+2} = \frac{T(n)}{n+1} + \frac{\alpha(2n+1)}{(n+1)(n+2)}$$
$$S(n) = \frac{T(n)}{n+1}$$
$$S(n+1) = S(n) + \frac{\alpha(2n+1)}{(n+1)(n+2)}$$

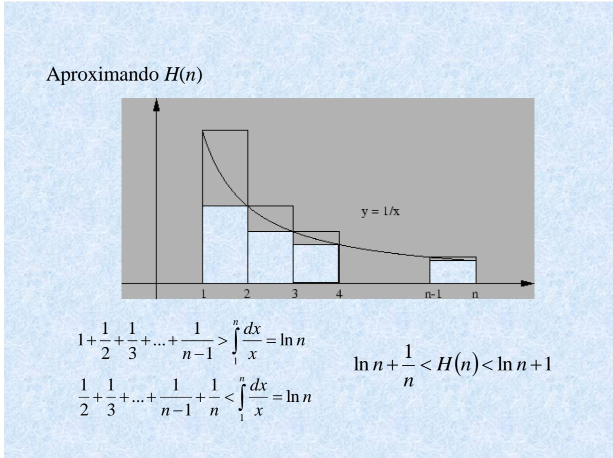
$$S(n+1) = S(0) + 3\alpha\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+2} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}$$
$$= S(0) + 3\alpha\left(H(n+1) - 1\right) - \alpha H(n)$$
$$= S(0) + 2\alpha H(n) + \frac{3\alpha}{n+1} - 3\alpha$$

onde $H(n) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \sim \ln n$

$$T(n) = 2\alpha(n+1)H(n) + \left(S(0) - 3\alpha\right)(n+1) + 3\alpha$$

Então, $T(n) = O(n\ln n)$

Aproximando $H(n)$



$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} > \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} < \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n$$

$$\ln n + \frac{1}{n} < H(n) < \ln n + 1$$

Comentários sobre o Quicksort

Para evitar o pior caso e casos ruins onde elementos estão em grupos ordenados pode-se utilizar uma estratégia probabilística: Selecione, ao invés do primeiro elemento para ser *a*, um elemento aleatório. Critérios:

- Seleção totalmente randômica: selecione qualquer elemento do subvetor usando um gerador de números aleatórios. Desvantagem: tempo de processamento extra para o gerador.
- Seleção da mediana entre os três elementos: lb, ub e elemento no meio.
- Seleção média: usa o valor media do subvetor. Todos estes métodos melhoram a performance média.

2 ORDENAÇÃO POR INSERÇÃO

Uma **ordenação por inserção** é a que ordena um conjunto de registros inserindo registros num arquivo ordenado já existente.

2.1 Inserção Simples

Exemplo: 4, 3, 6, 1, 5, 2

i = 5	4 3 6 1 **5** 2	temp = 5
i = 4	4 3 6 **1** 2 5	temp = 1
i = 3	4 3 **6** 1 2 5	temp = 6
i = 2	4 **3** 1 2 5 6	temp = 3
i = 1	**4** 1 2 3 5 6	temp = 4
i = 0	1 2 3 4 5 6	temp =

```
insertsort(int x[ ], int n)
{
  /*inicialmente x[n-1] é considerado um arq ordenado de um elemento*/
  /*após k passagens, os elementos x[k-1] a x[n-1] estarão em seqüência*/
  int i, j, temp;
  for (i = n-2; i >= 0; i--){
      temp = x[i] ;
      j = i+1;
      while (j <= n-1  &&  x[j] < temp) {
            x[j - 1] = x[j];
            j = j+1;
      }
      x[j - 1] = temp;       /*insere temp na posição correta*/
  }
}
```

Eficiência do Algoritmo de Inserção Simples

1. **Numero de comparações**:

$$1 + 2 + 3 + ... + (n - 1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

2. **Numero de deslocamentos**

Para *n* grande o componente principal do tempo gasto pelo algoritmo é o laço do *while* (deslocamento dos elementos à esquerda). Para analisar complexidade do algoritmo, precisamos calcular a soma dos números de deslocamento para cada um $i = n - 2, ..., 0$.

No exemplo anterior: 4, 3, 6, 1, 5, 2

i	4	3	2	1	0
distancia	1	0	3	2	3

distancia total 9.

1. **Melhor Caso**. Numero de deslocamento é zero, uma vez a lista original já está em ordem.
2. **Pior Caso**. Para uma lista de n itens, o numero de deslocamento é

   $$1 + 2 + 3 + ... + (n - 1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

   Isto acontece se a lista está em ordem reversa.

3. Caso Médio. Considere agora o algoritmo. No estagio *i* nós fazemos exame do elemento $x[i]$ e movemos a uma distância $d_i \in \{ 0, 1..., n - i - 1 \}$ a sua posição correta. $x[i]$ não foram tocados pelo algoritmo até este ponto assim, não temos nenhuma informação sobre sua posição apropriada na lista. Ou seja todas as SHIFT possíveis para $x[i]$ são igualmente prováveis. Assim a distancia média movida por $x[i]$ está

$$(0 + 1 + 2 + ... + (n - i - 1))/(n - i) = \left(\frac{1}{n-i}\right)\left(\frac{(n-i-1)(n-i)}{2}\right) = \frac{n-i-1}{2}$$

Então, em media, o numero total de deslocamento é

$$\sum_{i=0}^{n-2} \frac{n-i-1}{2} = \frac{n(n-1)}{4}$$

Portanto, este é um $O(n^2)$ algoritmo.

2.2 Ordenação de Shell
(Ordenação de Incremento Decrescente)

- O algoritmo de ordenação de Shell (nome de seu inventor Donald Shell) foi um dos primeiros a baixar a complexidade de $O(n^2)$.
- O algoritmo usa uma seqüência de incrementos e ordena os elementos cujo a distância é igual a este incremento. A cada etapa o incremento vai diminuindo até chegar a 1, ao final de uma etapa com incremento *k*, dizemos que o conjunto está *k*-ordenado. Uma importante propriedade deste algoritmo é que para $k1 < k2$ um conjunto $k1$-ordenado, que é submetido a uma ordenação com incremento $k2$, permanece $k1$-ordenado.

Por exemplo, se *k* = 5, cinco subvetores, cada um contendo um quinto do elementos do vetor original, são ordenados. São eles:

Subveotr 1	x[0] x[5] x[10] ...
Subvetor 2	x[1] x[6] x[11] ...
Subvetor 3	x[2] x[7] x[12] ...
Subvetor 4	x[3] x[8] x[13] ...
Subvetor 5	x[4] x[9] x[14] ...

O *i*-ésimo elemento do *j*-ésimo subvetor é x[(i-1)*5+j-1]. Se um incremento *k* diferente for escolhido, os k subvetores são divididos de modo que o *i*-ésimo elemento do *j*-ésimo subvetor seja x[(i-1)*k+j-1].

Exemplo: 25, 57, 48, 37, 12, 92, 86, 33

primeira iteração (incremento = 5)	(x[0], x[5])
	(x[1], x[6])
	(x[2], x[7])
	(x[3])
	(x[4])
segunda iteração (incremento = 3)	(x[0], x[3], x[6])
	(x[1], x[4], x[7])
	(x[2], x[5])

terceira iteração (incremento = 1)

(x[0], x[1], x[2], x[3], x[4], x[5], x[6], x[7])

Exemplo:

lista original	25 57 48 37 12 92 86 33
passagem 1	
incremento = 5	25 57 48 37 12 92 86 33
passagem 2	
incremento = 3	25 57 33 37 12 92 86 48
passagem 3	
incremento = 1	25 12 33 37 48 92 86 57
Lista classificada	12 25 33 37 48 57 86 92

```
void shellsort(int x[ ],  int n,  int incrmnts[ ],  int numinc)
/* incrts eh um array contendo os incrementos */
{
  int incr, j, k, span, temp;

  for (incr = 0; incr < numinc; incr++){
        span = incrmnts[incr];    /* span eh o tamanho do incremento */
        for (j = span; j < n; j++){
              temp = x[j];
              /*insere elemento x[j] em sua posição correta dentro de seu  subvetor*/
              for (k = j - span;  k >= 0 && temp < x[k]; k -= span)
                     x[k+span] = x[k];
              x[k+span] = temp;
        }
   }
}
```

Idéia Básica de Ordenação de Shell

1. A ordenação por inserção simples é altamente eficiente sobre uma lista de elementos quase ordenado.
2. Quando o tamanho de lista *n* é pequeno, uma ordenação $O(n^2)$ é em geral mais eficiente do que uma ordenação $O(n\log n)$. Isto acontece porque usualmente as ordenações $O(n^2)$ são muito simples de programar e exigem bem poucas ações alem de comparações e trocas em cada passagem. Por causa dessa baixa sobrecarga, a constante de proporcionalidade é bem pequena. Em geral, uma ordenação $O(n\log n)$ é muito complexa e emprega um grande numero de operações adicionais em cada passagem para diminuir o trabalho das passagens subsequentes. Sendo assim, sua constante de proporcionalidade é maior.

Observação: em geral, a ordenação de Shell é recomendada para as listas de tamanho moderado, da varias centenas de elementos.

Eficiência de Ordenação de Shell

- A ordem da ordenação de Shell pode ser aproximada por O(*n*(log*n*)2) se for usada uma seqüência apropriada de incrementos.
- Para outras seqüências de incrementos, o tempo de execução pode provar-se como $O(n^{1.5})$.