Lista 4

1) Sejam $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y-z=0\}$ e $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x=y\}$.

(a) $U \cap W$

Demonstração: Se $(x,y,z) \in U$, então $x+y=z$. E se $(x,y,z) \in W$, então $x=y$. Logo $U \cap W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x=y$ e $z=2x$.

(b) $U+W$

Demonstração:

$U+W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; (x,y,z) = (x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)$ onde $(x_1,y_1,z_1) \in U, (x_2,y_2,z_2) \in W\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; (x,y,z) = (x_1,y_1,x_1+y_1)+(x_2,x_2,z_2) = (x_1+x_2, y_1+x_2, x_1+y_1+z_2)\}$.

Agora é claro que $U+W \subset \mathbb{R}^3$. Dado $v=(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, tomando $u = (a,b,a+b) \in U$ e $w = (0,0,c-a-b) \in W$, temos $v = u+v$. Portanto $U+W = \mathbb{R}^3$. Pelo item (a) esta soma não é direta. ■

2) Dado $U = \{(x,y,z \in \mathbb{R}^3; x+2y+z=0\}$.

Demonstração: $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+2y+z=0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; (x,y,z) = (x,y,x+2y)\}$. Então dado $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, temos $(x,y,z) = (x,y,x+2y) + (0,0,z-(x+2y))$. Portanto se tomarmos $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x=y=0\}$, temos $\mathbb{R}^3 = U+W$ e $U \cap W = 0$. ■

3) Sejam $U = \{p \in P_2(\mathbb{R}); p' = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{p \in P_2(\mathbb{R}); p(1) = p(0) = 0\}$.

a)$U \cap W$

Demonstração: $U \cap W = \{p \in P_2(\mathbb{R}); p' = 0, \forall t \in \mathbb{R}$ e $p(1) = p(0) = 0\}$. Dado um polinômio $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ que pertence a $U \cap W$, então $p(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$, $p(1) = 0 \Rightarrow a_1 + a_2 = 0$ e $p'(t) = a_1 + 2a_2 t = 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow a_1 = a_2 = 0$. Portanto $U \cap W = 0$.

b) $U+W$

Demonstração: Como vimos no item a) se $p(t) \in W$ então $p(t) = a_0$, para $a_0 \in \mathbb{R}$ e se $p(t) \in U$, então $p(t) = b_1 t + b_2 t^2$ tal que $b_1 + b_2 = 0$. Portanto $U+W = \{p(t) \in P^2(\mathbb{R}); p(t) = p_1(t) + p^2(t),$ onde $p_1(t) \in U, p_2(t) \in W\} = \{p(t) \in P^2(\mathbb{R}); p(t) = a_0 + b_1 t - b_1 t^2\}$. ■

4) Sejam

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}); a = d \text{ e } b = c \right\}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} M_{2\times 2}(\mathbb{R}); a = c \text{ e } b = d \right\}$$

a) $U \cap W$

Demonstração: $U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}); a = d = b = c \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}; a \in \mathbb{R} \right\}$

b) $U + W$

Demonstração: $U + W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} M_{2\times 2}(\mathbb{R}); \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A + B \text{ onde } A \in U, B \in W \right\} =$
$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ c & d \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ b+c & a+d \end{pmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$

E pelo item a) a soma não é direta. ∎