

ICMC – USP
EST5510 – Tópicos de Teoria Assintótica – 2^o/2017
3^a lista de exercícios

1. Considere a sequência de v.a. $(X_n)_{n \geq 1}$ dada por $X_n(\omega) = \omega/n$ para $\omega \in \Omega = [0, 1]$ e uma probabilidade P tal que $P([a, b]) = b - a$, para $a, b \in \Omega$ com $a \leq b$. Prove que $X_n \xrightarrow{D} X \equiv 0$.
2. Considere o espaço de probabilidade $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, P)$, em que a probabilidade P é definida como no exercício 1. As sequências de v.a. $(X_n)_{n \geq 1}$ e $(Y_n)_{n \geq 1}$, definidas em Ω e com valores em \mathbb{R} , são dadas por $X_n(\omega) = nI_{[0,1/n)}(\omega)$ e $Y_n(\omega) = \omega^n$, para todo $\omega \in [0, 1]$ e para todo $n \geq 1$, em que $I_A(\omega) = 1$, se $\omega \in A$; 0, caso contrário. Verifique se as sequências $(X_n)_{n \geq 1}$ e $(Y_n)_{n \geq 1}$ convergem, ou não, quase certamente, em probabilidade, em distribuição e em média de ordem r , para algum $r > 0$.
3. $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ são v.a. independentes com $P(X_n = 0) = 1 - p_n$ e $P(X_n = 1) = p_n$, com $p_n \in (0, 1)$ para $n \geq 1$.
(a) Prove que $X_n \xrightarrow{P} 0$ se, e somente se, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$. (b) Prove que $X_n \xrightarrow{q.c.} 0$ se, e somente se, $\sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty$.
4. $(X_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência de v.a. i.i.d. com $X_1 \sim \text{uniforme}((0, \theta))$, $\theta > 0$. Seja $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$, $n \geq 1$. Prove que $Y_n \xrightarrow{P} \theta$. Verifique se $(Y_n)_{n \geq 1}$ converge quase certamente.
5. Suponha que $X \sim \text{Bernoulli}(1/2)$ e que $(X_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência de v.a. definida por $X_{2n} = X$ e $X_{2n-1} = 1 - X$, $n \geq 1$. Prove que $X_n \xrightarrow{D} X$, mas $X_n \not\xrightarrow{P} X$.
6. $(X_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência de v.a. tal que $X_n \sim \text{normal}(0, \sigma^2/n)$, $n \geq 1$.
(a) Prove que $X_n \xrightarrow{P} 0$. (b) Verifique se $(X_n)_{n \geq 1}$ converge, ou não, quase certamente para 0.
7. $(X_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência de v.a. tal que $X_n \sim \text{normal}(\mu_n, \sigma_n^2)$, $n \geq 1$, sendo que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \mu$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$, $\sigma \in (0, \infty)$. Prove que $X_n \xrightarrow{D} X \sim \text{normal}(\mu, \sigma^2)$.
8. $(X_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência de v.a. i.i.d. com $X_1 \sim \text{exponencial}(1)$. Para $n \geq 2$, defina $Y_n = X_n / \log(n)$.
(a) Prove que $Y_n \xrightarrow{P} 0$. (b) Prove que $P(|Y_n| \geq 1/2 \text{ i.v.}) = 1$. (c) A partir do item (b), podemos concluir que $Y_n \not\xrightarrow{q.c.} 0$?
9. $(X_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência de v.a. tal que $P(X_n = -1) = (2n)^{-1}$, $P(X_n = 0) = 1 - n^{-1}$ e $P(X_n = 1) = (2n)^{-1}$, $n \geq 1$. Prove que $X_n \xrightarrow{P} 0$ e $X_n \xrightarrow{m.r.} 0$ para todo $r > 0$.
10. $(X_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência de v.a. tal que $X_n \sim \text{uniforme}(\{1/n, 2/n, \dots, 1\})$, $n \geq 1$. Prove que $X_n \xrightarrow{D} X \sim \text{uniforme}((0, 1))$.