SMA 0333 Cálculo III - Lista 9

Eng. Aeronáutica e Bach. Física

1. (Séries de Fourier e convergência de séries de Fourier - Boyce Section 10.3 page 562)

   Nos problemas que se seguem admita que a função dada está estendida periodicamente fora do intervalo dado.

   (a) Encontre a série de Fourier da função dada.

   (b) Esboce o gráfico da função para qual a série de Fourier converge.

   1. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x < 1 \end{cases}$

   2. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ x & \text{se } 0 \leq x < \pi \end{cases}$

   3. $f(x) = \begin{cases} L + x & \text{se } -L \leq x < 0 \\ L - x & \text{se } 0 \leq x < L \end{cases}$

   4. $f(x) = 1 - x^2, \quad -1 \leq x \leq 1$

   5. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi \leq x < -\pi/2 \\ 1 & \text{se } -\pi/2 \leq x < \pi/2 \\ 0 & \text{se } \pi/2 \leq x < \pi \end{cases}$

   6. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ x^2 & \text{se } 0 \leq x < 1 \end{cases}$

2. (Boyce Section 10.3 page 563)

   Este problema indica como séries de Fourier podem ser utilizadas para resolver problemas de valores iniciais em E.D.O. com termo forçante periódico).

   (a) (Problema 13, Boyce, Section 10.3, page 563) Encontre a solução do problema de valor inicial

   $$y'' + \omega^2 y = \sin(nt), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

   onde n é um inteiro positivo e $\omega^2 \neq n^2$. O que acontece se $\omega^2 = n^2$.

   (b) (Problema 14, Boyce, Section 10.3, page 563) Encontre a solução do problema de valor inicial

   $$y'' + \omega^2 y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

   onde $\omega > 0$ não é igual a um inteiro positivo. Como é a solução se $\omega = n$ para algum inteiro positivo n?

(c) (Problema 15, Boyce, Section 10.3, page 563) Encontre a solução do problema de valor inicial

$$y'' + \omega^2 y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

onde f é periódica com período 2π e

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < t < \pi \\ 0 & \text{se } t = 0, \pi, 2\pi \\ -1 & \text{se } \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

(d) (Problema 16, Boyce, Section 10.3, page 563) Encontre a solução do problema de valor inicial

$$y'' + \omega^2 y = f(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

onde f é periódica com período 2π e

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t & \text{se } 0 < t < 1 \\ -1 + t & \text{se } 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

3. (Problema 17, Boyce, Section 10.3, page 563) Suponha que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(\frac{n\pi x}{L}) + b_n \sin(\frac{n\pi x}{L}) \right)$$

Mostre que

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)^2 \, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right)$$

Esta identidade é chamada de Identidade de Parseval e é muito importante na teoria de séries de Fourier.

4. Encontre a série de Fourier solicitada para a função dada e esboce o gráfico da função soma da série de Fourier.

(a) (Problema 15, Boyce, Section 10.4, page 570) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{se } 1 < t < 2 \end{cases}$

série de cossenos. período 4

(b) (Problema 16, Boyce, Section 10.4, page 570) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{se } 1 \leq t < 2 \end{cases}$

série de senos. período 4

(c) (Problema 17, Boyce, Section 10.4, page 570) $f(x) = 1, \; 0 \leq x \leq \pi$ série de cossenos, período 2π

(d) (Problema 18, Boyce, Section 10.4, page 570) $f(x) = 1, \; 0 < x < \pi$ série de senos, período 2π

(e) (Problema 20, Boyce, Section 10.4, page 570) $f(x) = x, \; 0 \leq x < 1$ série de Fourier, período 1

(f) (Problema 21, Boyce, Section 10.4, page 570) $f(x) = L - x, \; 0 \leq x \leq L$ série de cossenos, período $2L$

(g) (Problema 22, Boyce, Section 10.4, page 570) $f(x) = L - x, \; 0 \leq x \leq L$ série de senos, período $2L$

5. (Problema 37, Boyce, Section 10.4, page 571]) Suponha que f tenha série de Fourier

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x/L), \quad 0 \leq x \leq L.$$

(a) Mostre que

$$\frac{2}{L} \int_0^L f(x)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2.$$

(b) Aplique a parte (a) para a série de Fourier de $f(x) = x, -L < x < L$ e $f(-L) = f(L) = 0$ para mostrar que

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

(Esta relação foi descoberta por Euler em 1735 de modo totalmente diferente.)

6. Considere a condução de calor em uma barra de comprimento 40 cm cujas extremidades são mantidas a 0°C para todo $t > 0$. Nos problemas a seguir encontre a expressão da temperatura $u(x,t)$ se a distribuição de tempratura inicial da barra é a função dada. Suponha a constante de difusibilidade igual a 1.

- (Problema 9, Boyce, Section 10.5, page 579) $u(x, 0) = 50, 0 < x < 40$.
- (Problema 10, Boyce, Section 10.5, page 579) $u(x, 0) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 20 \\ 40 - x, & 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$

7. (Problema 13, Boyce, Section 10.5, page 579) Considere novamente a barra no Problema 9. Para $t = 5$ e $x = 20$ determine quantos termos são necessários para encontrar a solução com três casas decimais de precisão.

8. (Problema 14, Boyce, Section 10.5, page 579) Ainda sobre a barra considerada no (Problema 9, Boyce, Section 10.5, page 579),

   (a) Esboce o gráfico de u versus x para $t = 5$, 10, 20, 40 e 200. Ponha todos os gráficos num mesmo sistema cartesiano e analise como a temperatura muda com o tempo.

   (b) Esboce o gráfico de u versus t para $x = 5$, 10 e 20.

   (c) Esboce o gráfico em dimensão 3 de u versus t e x.

   (d) Quanto tempo leva para a barra ficar a uma temperatura inferior a 1° C?

9. (Problema 22, Boyce, Section 10.6, page 581) A equação do calor em dimensão dois é

$$u_t = a^2 \left(u_{xx} + u_{yy}\right)$$

   Supondo que $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$, encontre as equações diferenciais ordinárias satisfeitas por $X(x), Y(y)$ e $T(t)$.

10. (Problema 23, Boyce, Section 10.6, page 581) A equação do calor em dimensão dois pode ser expressa em coordenadas polares como

$$u_t = a^2 \left[u_{rr} + (1/r)u_r + (1/r^2)u_{\theta\theta}\right]$$

   Supondo que $u(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$, encontre as equações diferenciais ordinárias satisfeitas por $R(r), \Theta(\theta)$ e $T(t)$.

11. (Problema do calor em uma barra com extremidades isoladas) Um problema do calor um pouco diferente daquele que estudamos na aula mas que também pode ser tratado pelo método de separação de variáveis é obtido quando as extremidades da barra estão isoladas (condição de Neumann). Siga os passos a seguir para enuncie um teorema de existência de solução e exibir uma fórmula da solução do problema do calor com condição de Neumann:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < \pi, \ t > 0 \quad \text{(Equação do Calor)} \\ u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0, & t \geq 0 \quad \text{(Fluxo zero nas extremidades)} \\ u(0, x) = f(x), & 0 \leq x \leq \pi \quad \text{(Condição inicial)} \end{cases}$$

(a) Use o método de separação de variáveis $u(t,x) = T(t)X(x)$ para obter

$$T'' + \lambda T = 0 \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases}$$

(b) Verifique que $\lambda = 0$ ou $\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$, e que para cada $n \in N \cup \{0\}$ as respectivas soluções são

$$X_0(x) = 1, \quad T_0(t) = 1, \quad X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad T_n(t) = e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

(c) Defina $u_0(t,x) = T_0(t)X_0(x) = 1$ e $u_n(t,x) = T_n(t)X_n(x) = e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, e considere

$$u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(t,x).$$

(d) Verifique que se $f \in C([0,L])$ é diferenciável, exceto um número finito de pontos, e $f' \in SC([0,L])$ então u satisfaz $u(0,x) = f(x)$, $x \in [0,L]$, desde que a_n sejam os coeficientes de Fourier da sua série de Fourier de cossenos de f (aproveite para discutir a necessidade de estender a função f a toda reta a uma função par, contínua e periódica de período $2L$.

(e) Verifique que

$$u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

onde a_n são os coeficientes de Fourier da sua série de Fourier de f, define uma função contínua em $[0,\infty) \times [0,L]$ e que a série pode ser derivada termo a termo com respeito a t (uma vez) e a x (duas vezes) para todo $t > 0$ e $x \in [0,L]$.

Sugestão: use o mesmo argumento que empregamos para o problema do calor estudado na aula para a condição de fronteira nula (Dirichlet).

(f) Conclua que $u(t,x)$ definida acima é a solução do problema do calor com condição de Neumann.

(g) Note que se $f(x) = k$, uma constante, então $u(x,t) = k$.

(h) Estude $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ e interprete o resultado obtido.

12. Use o problema anterior para encontrar a solução do problema:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < \pi,\ 0 < t < \infty \\ u_x(0,t) = 0,\ u_x(\pi,t) = 0, & 0 \le t < \infty \\ u(x,0) = f(x), & 0 \le x \le \pi, \end{cases}$$

onde a condição inicial é dada por $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{se } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$

13. (Problema 12, Boyce, Section 10.6, page 589) Considere uma barra de comprimento L com temperatura incial $u(x,0) = \sin(\pi x/L)$, $0 \leq x \leq L$. Suponha que extremidades estão isoladas. Encontre temperatura $u(x,t)$. Faça $t \to \infty$ para encontrar a temperatua estacionária.

14. (Problema 15, Boyce, Section 10.6, page 589) Considere uma barra de comprimento L com temperatura incial $u(x,0) = f(x)$, $0 \leq x \leq L$. Suponha que na extremidade $x = 0$ a temperatura é 0, enquanto que a extrimidade L está isolada. Encontre temperatura $u(x,t)$. Faça $t \to \infty$ para encontrar a temperatua estacionária.

15. (Problema 1, Boyce, Section 10.7, page 600) Considere uma corda de comprimento L com as extremidades mantidas fixas. A corda é posta em movimento com velocidade incial nula a partir da posição inicial $u(x,0) = f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{L}, 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{2(L-x)}{L}, \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$. Encontre o deslocamento $u(x,t)$

16. (Problema 5, Boyce, Section 10.7, page 600) Considere uma corda de comprimento L com as extremidades mantidas fixas. A corda é posta em movimento a partir da posição de equilíbrio ($u(x,0) = 0$) com velocidade inicial $u_t(x,0) = f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{L}, 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{2(L-x)}{L}, \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$. Encontre o deslocamento $u(x,t)$

17. (Problema 9, Boyce, Section 10.7, page 601) Encontre o deslocamento $u(x,t)$ de uma corda de comprimento L fixada $x = 0$ ($u(0,t) = 0$) e livre em $x = L$ ($u_x(L,t) = 0$) e que posta em movimento a partir da posição inicial $u(x,0) = f(x)$ com velocidade nula.

18. (Problema 22, Boyce, Section 10.7, page 604) O movimento de uma membrana circular elástica, tal como um tambor, é governada pela equação da onda em dimensão dois

$$u_{rr} + (1/r)u_r + (1/r^2)u_{\theta\theta} = a^{-2}u_{tt}$$

Supondo que $u(r,\theta,t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$. encontre as equações diferenciais ordinárias satisfeitas por $R(r)$, $\Theta(\theta)$ e $T(t)$.