

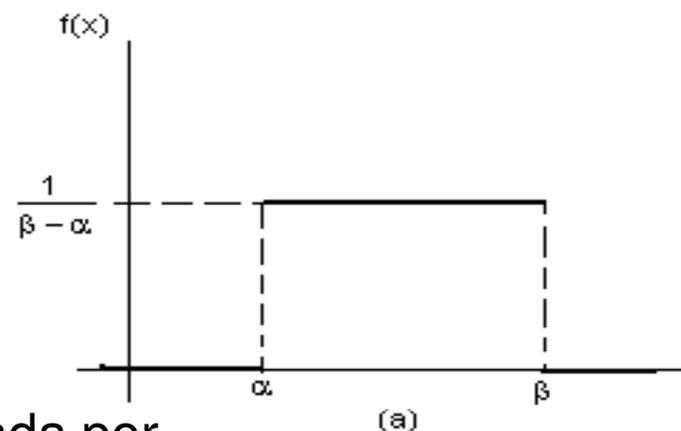
5. PRINCIPAIS MODELOS CONTÍNUOS

2012

5.1. Modelo uniforme

Uma v.a. contínua X tem distribuição uniforme com parâmetros α e β ($\alpha < \beta$) se sua função densidade de probabilidade é dada por

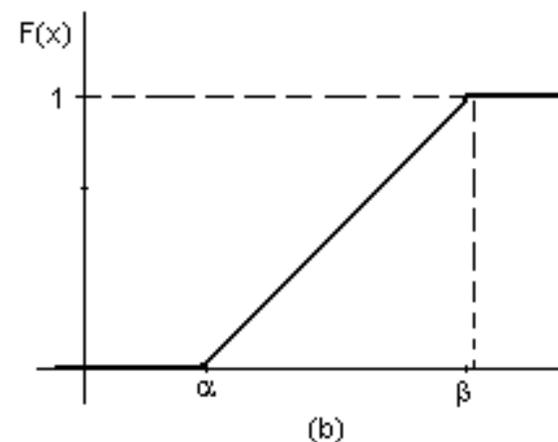
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha}, & \alpha \leq x \leq \beta \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$



Notação: $X \sim U(\alpha, \beta)$.

A função de distribuição acumulada é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < \alpha, \\ \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}, & \text{se } \alpha \leq x \leq \beta, \\ 1, & \text{se } x > \beta. \end{cases}$$



Propriedades:

$$E(X) = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}.$$

Exemplo

A dureza de uma peça de aço pode ser pensada como sendo uma variável aleatória uniforme no intervalo (50,70) unidades. Qual a probabilidade de que uma peça tenha dureza entre 55 e 60?

Solução. X representa a dureza de uma peça de aço, sendo que $X \sim U(50, 70)$ e

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20}, & 50 \leq x \leq 70, \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Portanto,

$$P(55 < X < 60) = \int_{55}^{60} \frac{1}{20} dx = \frac{5}{20} = 0,25.$$

5.2. Modelo exponencial

Uma v.a. contínua X tem distribuição exponencial com parâmetro $\lambda > 0$ se sua função de densidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

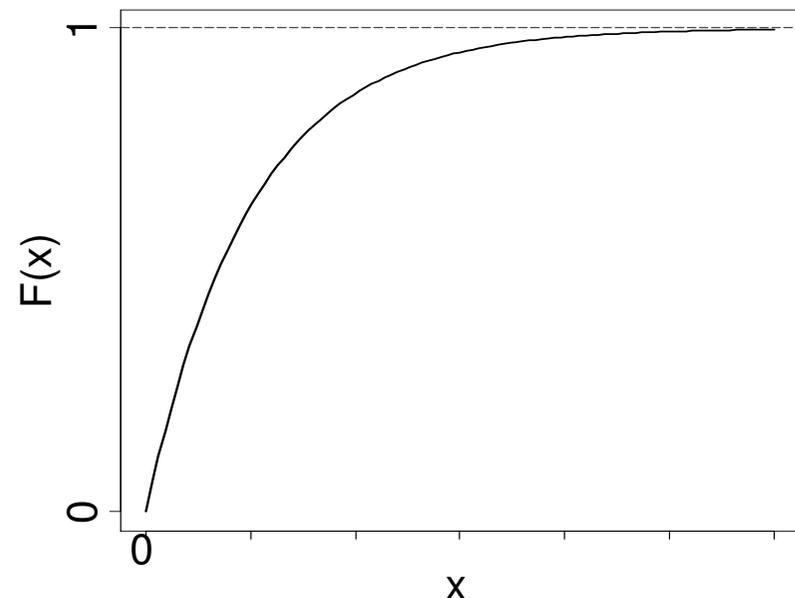
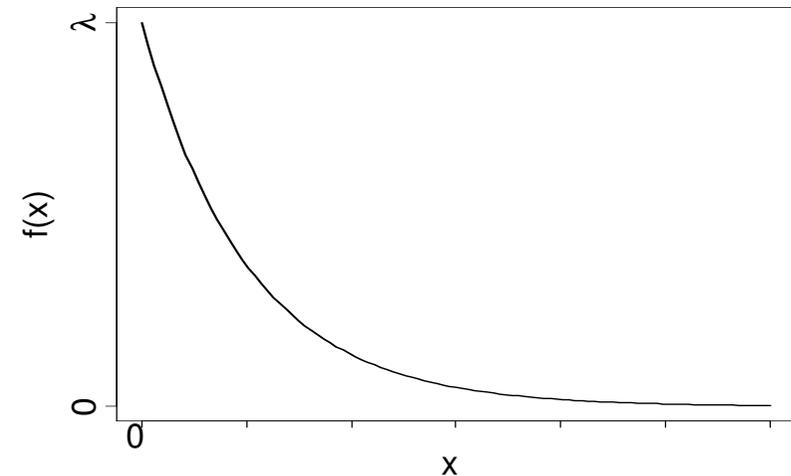
Notação: $X \sim \text{Ex}(\lambda)$.

A função de distribuição acumulada é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Propriedades:

$$E(X) = 1/\lambda \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = 1/\lambda^2.$$



5.2. Modelo exponencial

Propriedade. Se $X \sim \text{Ex}(\lambda)$, então $P(X > a + b | X > b) = P(X > a)$.

É a única distribuição contínua com esta propriedade (“falta de memória”).

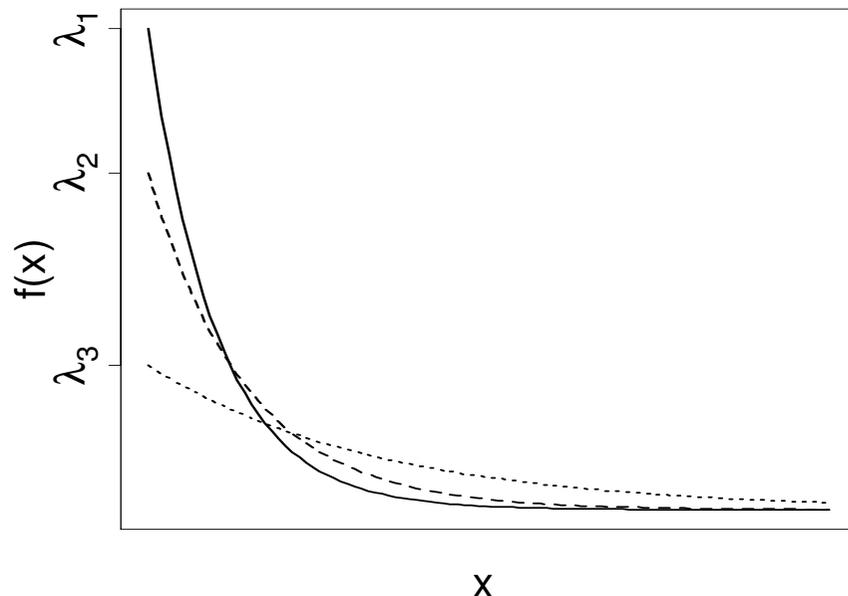
Observação. Também encontramos $X \sim \text{Ex}(\alpha)$, em que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{x}{\alpha}}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Relação: $\alpha = 1 / \lambda$.

α : escala e λ : taxa.

Exemplo. Diferentes valores de λ .



Exemplo

- O tempo de vida de um tipo de fusível segue uma distribuição exponencial com vida média de 100 horas. Cada fusível tem um custo de \$10,0 e se durar menos de 200 horas há um custo adicional de \$8,0.
- (a) Qual é a probabilidade de um fusível durar mais de 150 horas?
(b) Determinar o custo esperado.

Solução. Se X é o tempo de vida de um fusível, temos $E(X) = 100$ horas, $\lambda = 1 / E(X) = 0,01$ e $X \sim \text{Ex}(0,01)$. Ou seja,

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{100}}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$(a) P(X > 150) = 1 - P(X \leq 150) = 1 - (1 - e^{-\frac{150}{100}}) = e^{-1,5} = 0,223.$$

Exemplo

(b) O custo C é uma v.a. **discreta** dada por

$$C(X) = \begin{cases} 10, & \text{se } X \geq 200, \\ 10 + 8, & \text{se } X < 200. \end{cases}$$

O custo esperado (**custo médio**) é $E(C) = 10 \times P(C = 10) + 18 \times P(C = 18)$. Usando a variável X calculamos

$$P(C = 10) = P(X \geq 200) = 1 - P(X < 200) = 1 - F(200) = e^{-2},$$

$$P(C = 18) = P(X \leq 200) = F(200) = 1 - e^{-2} \text{ e}$$

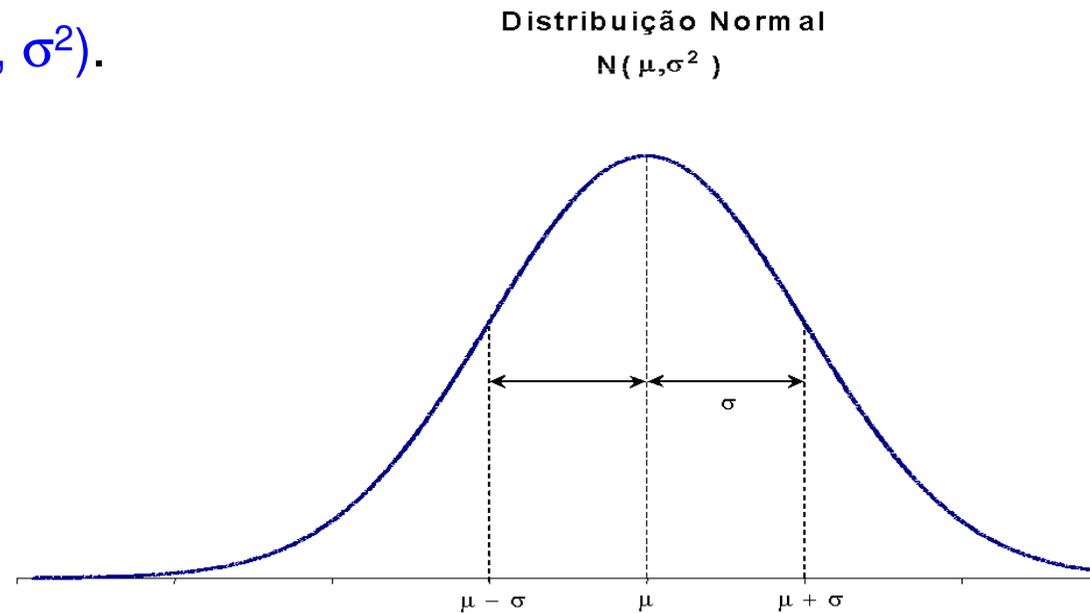
$$E(C) = 10 \times e^{-2} + 18 \times (1 - e^{-2}) = \$16,9.$$

5.3. Modelo normal (ou gaussiano)

Uma variável aleatória contínua X tem distribuição normal com **média** μ e **variância** σ^2 se sua função densidade é dada por

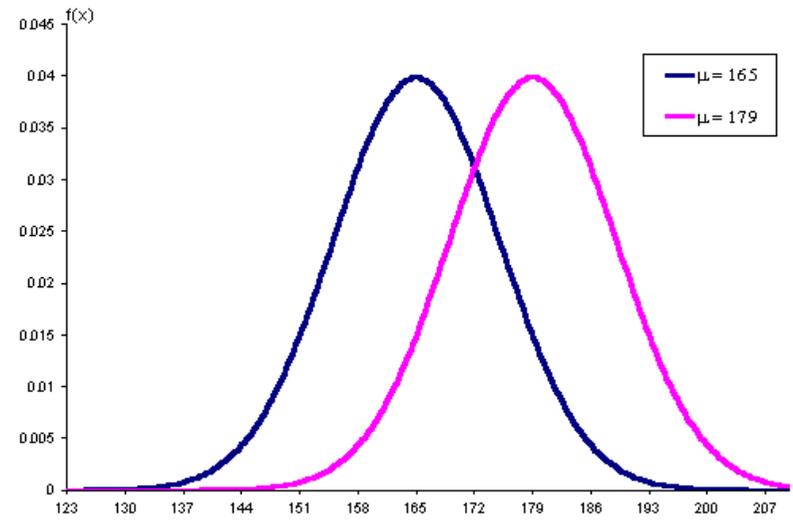
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Notação: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

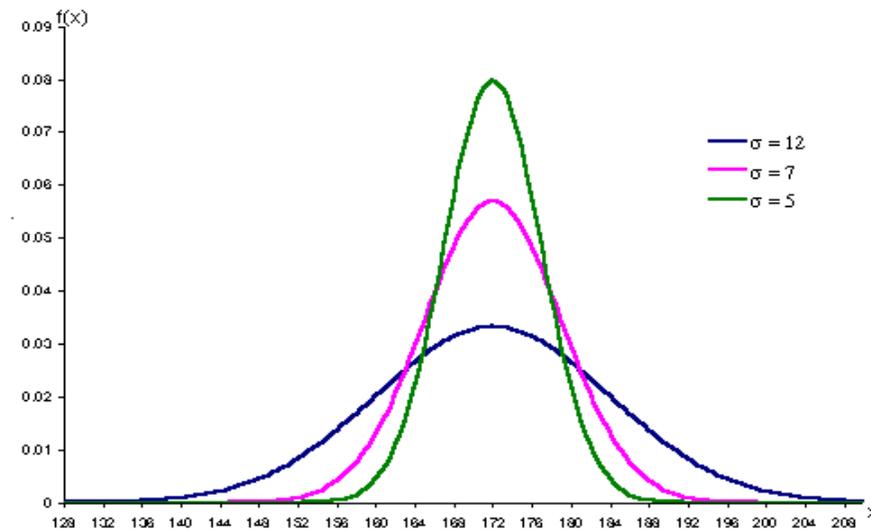


Exemplos

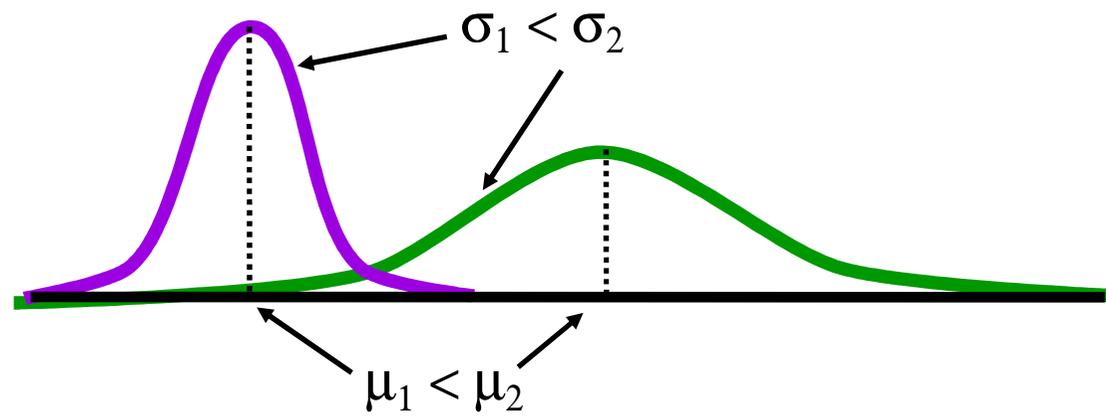
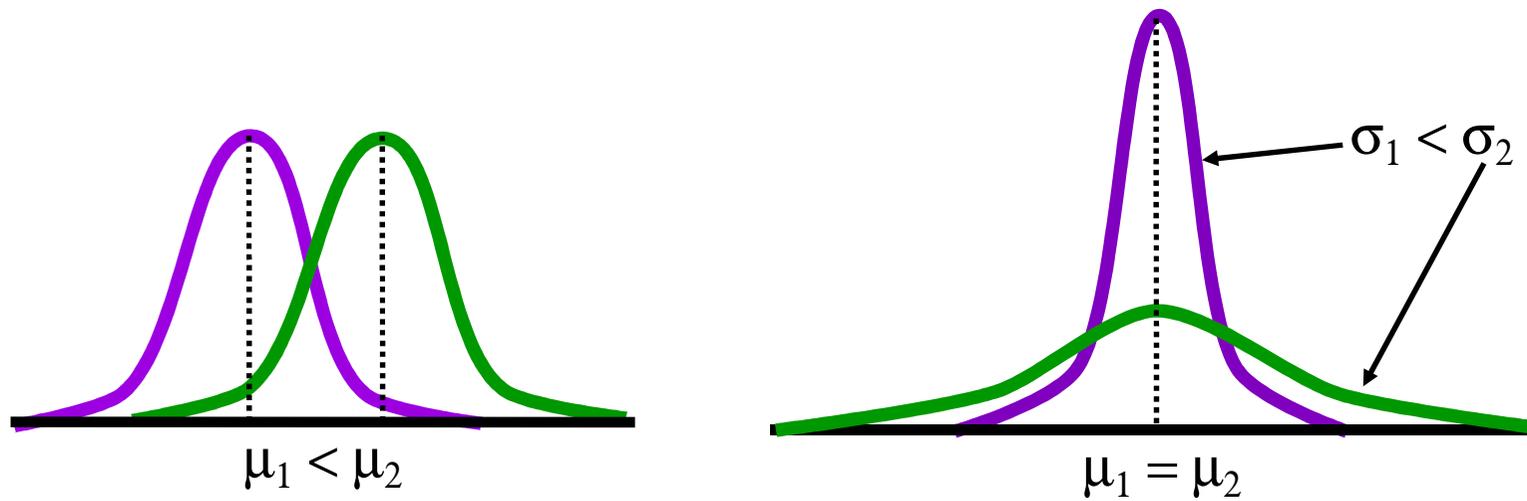
Distribuições normais com médias diferentes e variâncias iguais.



Distribuições normais com médias iguais e variâncias diferentes.

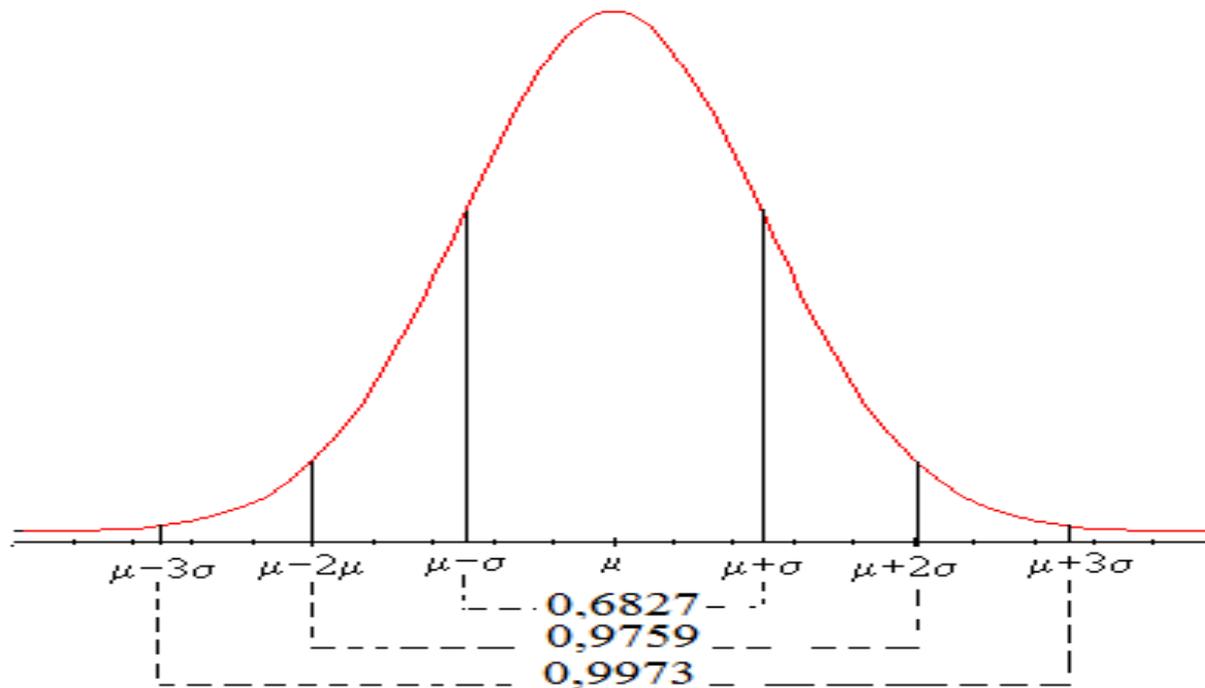


Exemplos



Propriedades

- (a) $E(X) = \mu$, $\text{Var}(X) = \sigma^2$ e mediana = moda = μ .
- (b) A distribuição é **simétrica** em relação à média.
- (c) Como a área total sob curva é igual a 1, à esquerda e à direita de μ a área é igual a **0,5**.
- (d) $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0,6827$,
 $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0,9759$ e
 $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0,9973$.



Propriedades

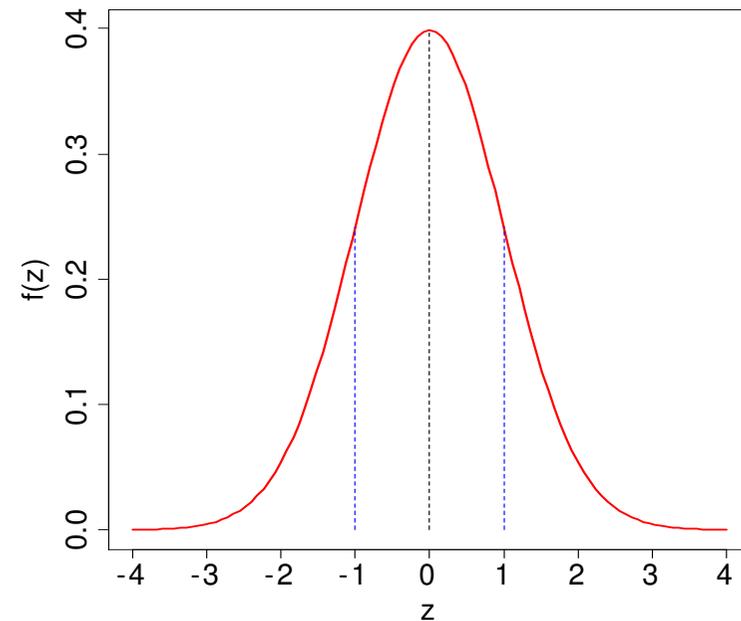
A função de distribuição acumulada de uma v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ é

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} dt.$$

Integral **sem solução analítica**.
Cálculo de probabilidades com o auxílio de tabelas.

Normal **padrão** ou **reduzida**. Se Z é uma v.a. normal com **média 0** e **variância 1**, então Z é chamada de uma v.a. normal padrão ou reduzida e sua função densidade é

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, z \in R.$$



A função de distribuição acumulada de uma v.a. $Z \sim N(0,1)$ é

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt.$$

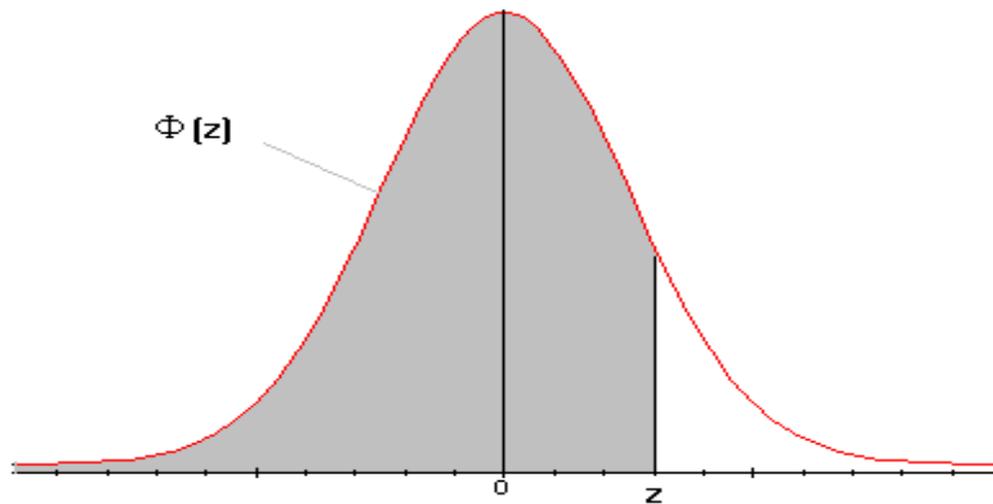
Uso da tabela normal

Table A.3. Areas under the normal curve.

$Z \sim N(0,1)$: distribuição normal **padrão**.

Valores no corpo da tabela: $\Phi(z) = P(Z \leq z)$, z com **duas** decimais.

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt, \quad -3,40 \leq z \leq 3,49.$$



Uso da tabela normal

1ª coluna: parte **inteira** de z e **1ª** decimal.

1ª linha: **2ª** decimal de z .

Exemplo. $P(Z \leq -1,25)$ é encontrada na interseção da linha correspondente a **-1,2** com a coluna **0,05**:

2ª decimal
↓

| z | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|-------------|------|------|------|------|------|---------------|------|------|------|------|
| -3,4 | | | | | | | | | | |
| ... | | | | | | | | | | |
| -1,2 | | | | | | 0,1056 | | | | |
| ... | | | | | | | | | | |
| 3,4 | | | | | | | | | | |

Parte inteira e 1ª decimal →

Resposta. $P(Z \leq -1,25) = 0,1056$.

Exemplo

Se $Z \sim N(0,1)$, calcule

- (a) $P(Z < 1,80)$,
- (b) $P(0,80 < Z < 1,40)$,
- (c) $P(Z > -0,57)$ e
- (d) o valor de k tal que $P(Z < k) = 0,05$.

Em R e Excel:

- (a) `pnorm(1.8)` e `=DIST.NORMP(1,8)`.
- (b) `pnorm(1.4)-pnorm(0.8)` e `= DIST.NORMP(1,4) – DIST.NORMP(0,8)`.
- (c) `1-pnorm(-0.57)` e `=1-DIST.NORMP(-0,57)`.
- (d) `qnorm(0.05)` e `=INV.NORMP(0,05)`.

Solução. Da tabela normal padrão tem-se

$$(a) P(Z < 1,80) = \Phi(1,80) = 0,9641,$$

$$(b) P(0,80 < Z < 1,40) = \Phi(1,40) - \Phi(0,80) = 0,9192 - 0,7881 = 0,1311,$$

$$(c) P(Z > -0,57) = 1 - P(Z \leq -0,57) = 1 - 0,2843 = 0,7157,$$

$$(d) P(Z < k) = 0,05 \Rightarrow k = -1,64.$$

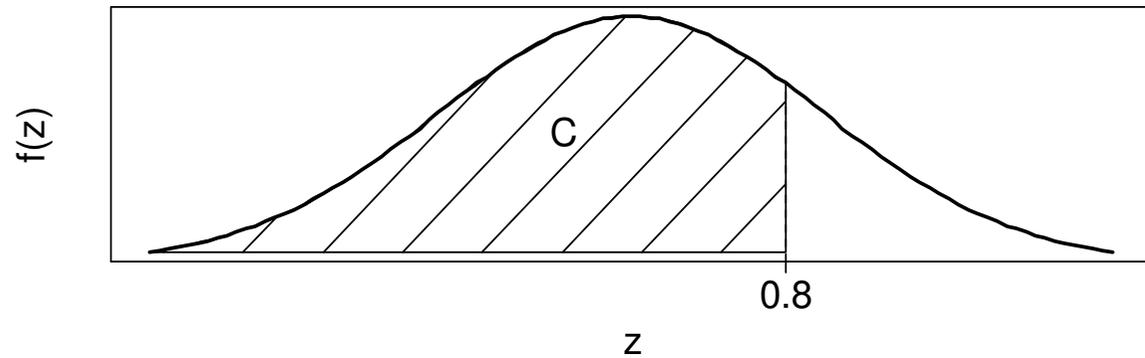
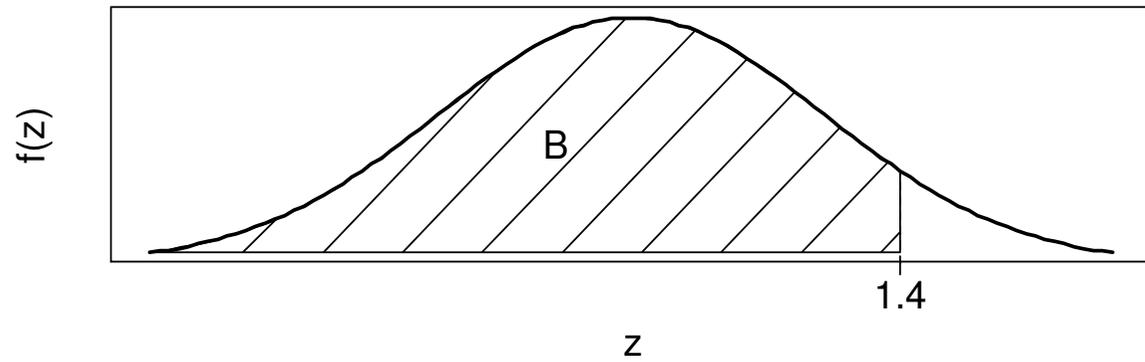
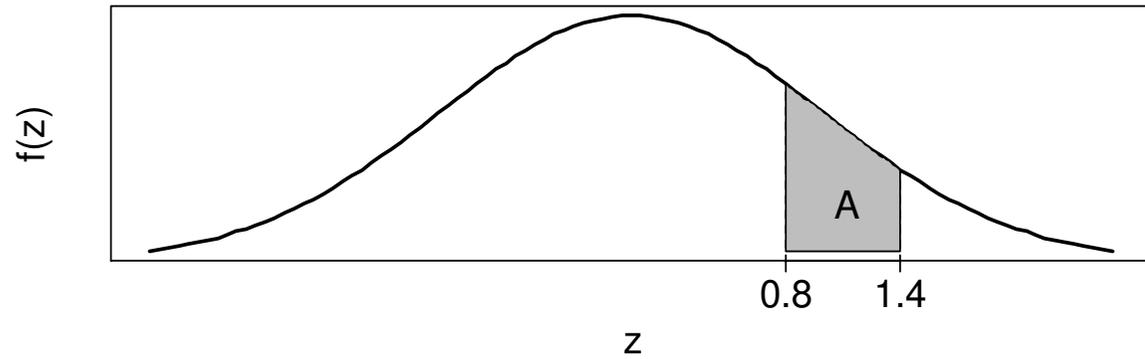
Observação. Para todo $k > 0$,

$$(i) P(Z \leq -k) = 1 - P(Z \leq k) \quad e$$

$$(ii) P(-k \leq Z \leq k) = 2P(Z \leq k) - 1 = 1 - 2P(Z \leq -k).$$

Exemplo (b)

$A = B - C$, sendo que
B e C são
encontradas na
tabela normal.



Transformação linear de uma variável normal

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então $Y = a + bX \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, sendo que $\mu_Y = a + b\mu$ e $\sigma_Y^2 = b^2 \sigma^2$.

Tomando $a = -\mu / \sigma$ e $b = 1 / \sigma$ obtemos a **padronização**

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

Distribuição normal **padrão** ou **reduzida**.

Exemplo. Se $X \sim N(90, 100)$, determinar

(a) $P(80 < X < 100)$,

(b) $P(|X - 90| < 30)$ e

(c) o valor de a tal que $P(90 - 2a < X < 90 + 2a) = 0,99$.

Exemplo

$$(a) P(80 < X < 100) = P\left(\frac{80-90}{10} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{100-90}{10}\right) = P(-1,00 < Z < 1,00) \\ = 2P(Z \leq 1,00) - 1 = 2 \times 0,8413 - 1 = 0,6826.$$

$$(b) P(|X - 90| < 30) = P(-30 < X - 90 < 30) = P\left(-\frac{30}{10} < \frac{X-90}{10} < \frac{30}{10}\right) \\ = P(-3,00 < Z < 3,00) = 2P(Z < 3,00) - 1 \\ = 2 \times 0,9987 - 1 = 0,9974.$$

$$(c) P(90-2a < X < 90+2a) = P(-2a < X - 90 < 2a) = P\left(-\frac{2a}{10} < \frac{X-90}{10} < \frac{2a}{10}\right) \\ = 2P\left(Z \leq \frac{a}{5}\right) - 1 = 0,99 \Rightarrow P\left(Z < \frac{a}{5}\right) = 0,995$$

$$\Rightarrow \frac{a}{5} = 2,57 \Rightarrow a = 12,85.$$

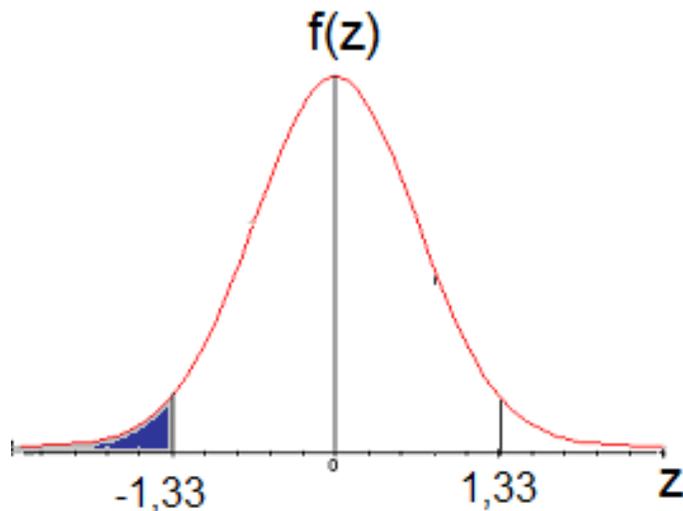
Exemplo

O tempo necessário para produzir um lote de itens tem distribuição normal com **média 120** minutos e desvio padrão **15** minutos.

(a) Sorteando-se um lote produzido, qual a probabilidade de que tempo de produção seja **inferior** a **100** minutos?

Solução. Definimos X como o tempo de produção do lote. Pelo enunciado, $X \sim N(120, 15^2)$. Calculamos

$$\begin{aligned} P(X < 100) &= P\left(Z < \frac{100 - 120}{15}\right) = P(Z \leq -1,33) \\ &= \Phi(-1,33) = 0,0918. \end{aligned}$$



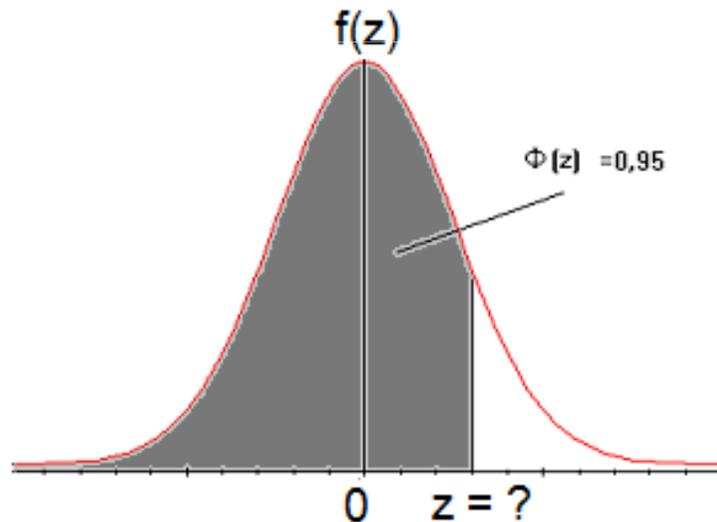
Exemplo

(b) Qual o tempo correspondente à produção de 95% dos itens?

Solução. Devemos encontrar x tal que $P(X < x) = 0,95$. Após uma transformação,

$$P(X < x) = P\left(Z < \frac{x-120}{15}\right) = 0,95.$$

Iniciamos encontrando z tal que $\Phi(z)=0,95$.



Da tabela normal, $z = 1,64$. Logo,
 $x = 120 + 1,64 \times 15 = 144,6$ min.

Em Excel: `=INV.NORMP(0,95)`
 $= z = 1,644853$.

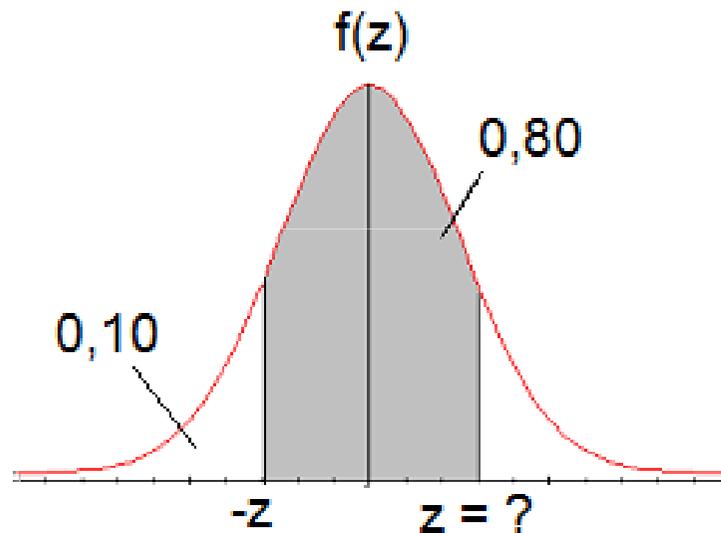
`=120 + INV.NORMP(0,95) * 15`
 $= 144,6728$.

Exemplo

(c) Qual o **intervalo** de tempo **central** correspondente à produção de 80% dos itens?

Solução. Devemos encontrar x_1 e x_2 tais que

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = 0,80 \Rightarrow P\left(\frac{x_1 - 120}{15} \leq Z \leq \frac{x_2 - 120}{15}\right) = 0,80 .$$



Probabilidade acumulada até o ponto z é igual a **0,90**.

Iniciamos encontrando z tal que $\Phi(z) = 0,90$. Da tabela normal, $z = 1,28$.

Logo,

$$\frac{x_1 - 120}{15} = -1,28 \Rightarrow x_1 = 120 - 15 \times 1,28 \Rightarrow x_1 = 100,8 \text{ min,}$$

$$\frac{x_2 - 120}{15} = 1,28 \Rightarrow x_2 = 120 + 15 \times 1,28 \Rightarrow x_2 = 139,2 \text{ min .}$$

A escala sigma

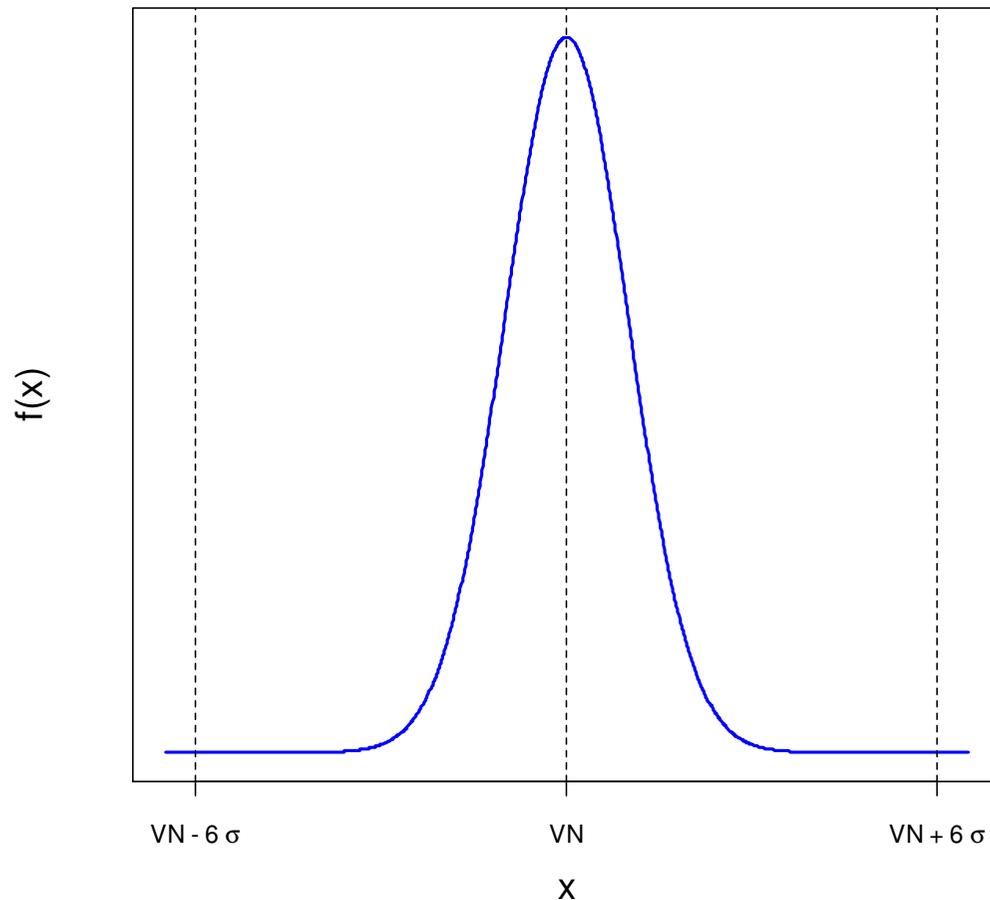
Utilizada para medir o nível de **qualidade** de um processo de produção.

Quanto **maior** o número de sigmas (σ), **melhor**.

X representa uma característica de um item, sendo que $X \sim N(VN, \sigma^2)$.

$\mu = VN =$ valor nominal.

Limites de especificação: **LIE** = $VN - 6\sigma$ e **LSE** = $VN + 6\sigma$.



$$\begin{aligned} P(X < VN - 6\sigma) + P(X > VN + 6\sigma) \\ &= 2 P(X < VN - 6\sigma) \\ &= 2 \times 9,865876 \times 10^{-10} \\ &= 1,973175 \times 10^{-9}. \end{aligned}$$

Em Excel: $=2*DIST.NORMMP(-6)$
 $= 1,98024 \times 10^{-9}$.

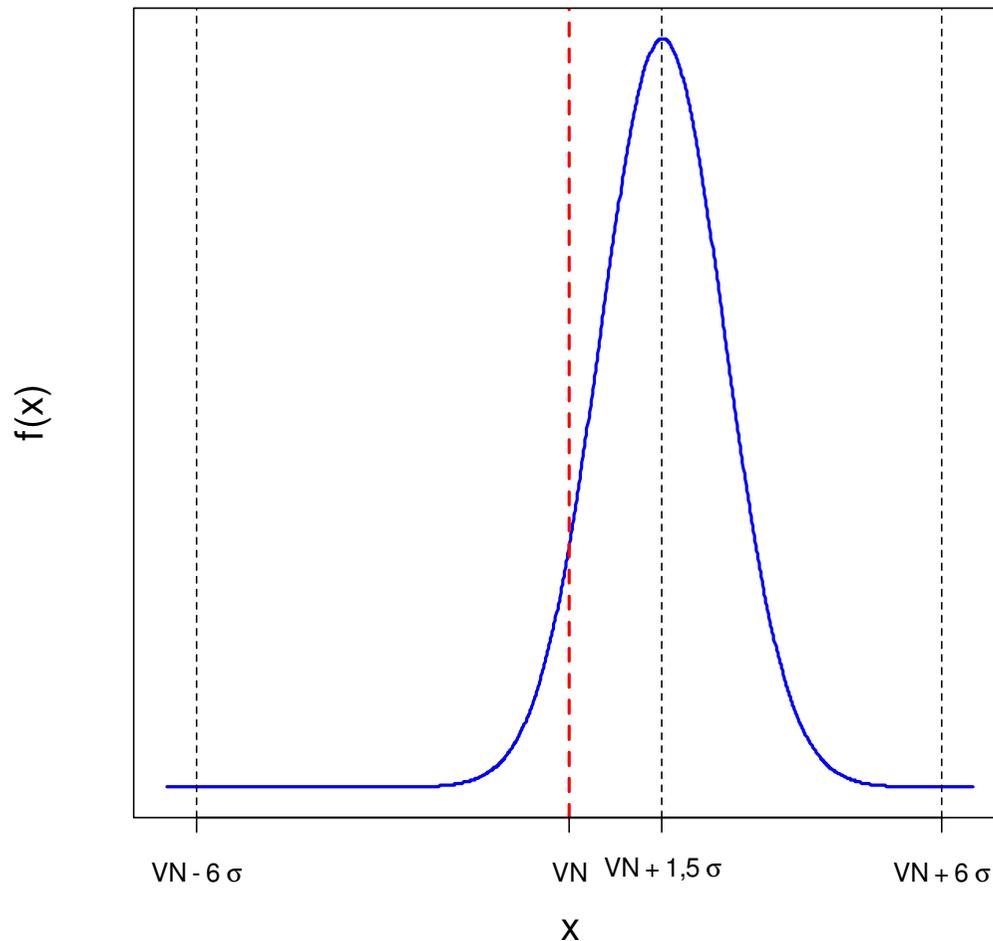
Corresponde, **em média**, a cerca de **dois** itens que não atendem às especificações a cada **bilhão** de itens produzidos.

$$=2*DIST.NORMMP(-6)* 1E9 = 1,980.$$

A escala sigma

O processo sofre uma **alteração**. A média passa a ser $\mu = VN - 1,5\sigma$ ou $\mu = VN + 1,5\sigma$.

Considere $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, em que $\mu = VN + 1,5\sigma$.



$$P(X < VN - 6\sigma) + P(X > VN + 6\sigma) = 3,397673 \times 10^{-6}.$$

Em Excel:

$$=DIST.NORM(-6;1,5;1;VERDADEIRO)+1-DIST.NORM(6;1,5;1;VERDADEIRO) = 3,4008 \times 10^{-6}.$$

Corresponde, **em média**, a cerca de **3,4** itens que não atendem às especificações a cada **milhão** de itens produzidos.

A escala sigma

| Nível | Média de defeitos por milhão |
|------------|------------------------------|
| 2 σ | 308537 |
| 3 σ | 66807 |
| 4 σ | 6210 |
| 5 σ | 233 |
| 6 σ | 3,4 |

| 4 σ | 6 σ |
|--|---|
| Sete horas de falta de energia por mês | Uma hora de falta de energia a cada 34 anos |
| 5000 cirurgias incorretas por semana | 1,7 cirurgia incorreta por semana |
| 15 minutos de fornecimento de água não potável por dia | Um minuto de fornecimento de água não potável a cada sete meses |

Fonte: Keene, S. (2000), *Reliability Review* 20, p.19.

Propriedade

Se X_1, \dots, X_n são v.a. independentes tais que $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, para $i = 1, \dots, n$, então, a v.a.

$$Y = X_1 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

é tal que $Y \sim N(n\mu, n\sigma^2)$.

Padronização:

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0,1).$$

Exemplo. O peso de uma caixa de peças é uma v.a. normal com **média 65 kg** e **desvio padrão de 4 kg**. Um carregamento de **120 caixas** de peças é despachado. Qual a probabilidade de que a carga pese entre 7.893 kg e 7.910 kg?

Exemplo

Solução. Pelo enunciado,

X_i : peso da i -ésima caixa $\Rightarrow X_i \sim N(65,16), i = 1, \dots, 120$.

Logo,

Y : peso da carga $\Rightarrow Y = \sum_{i=1}^{120} X_i \sim N(120 \times 65, 120 \times 16)$,

$Y \sim N(7800, 1920)$.

Calculamos

$$P(7893 \leq Y \leq 7910) = P\left(\frac{7893 - 7800}{\sqrt{1920}} \leq Z \leq \frac{7910 - 7800}{\sqrt{1920}}\right)$$

$$= P(2,12 \leq Z \leq 2,51) = \Phi(2,51) - \Phi(2,12)$$

$$= 0,4940 - 0,4830 = 0,0110 .$$

Teorema central do limite

Se X_1, X_2, \dots, X_n é uma amostra aleatória de tamanho n de uma distribuição com média μ e desvio padrão σ ($0 < \sigma < \infty$), então a distribuição **aproximada** de

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \text{ é normal padrão } N(0,1),$$

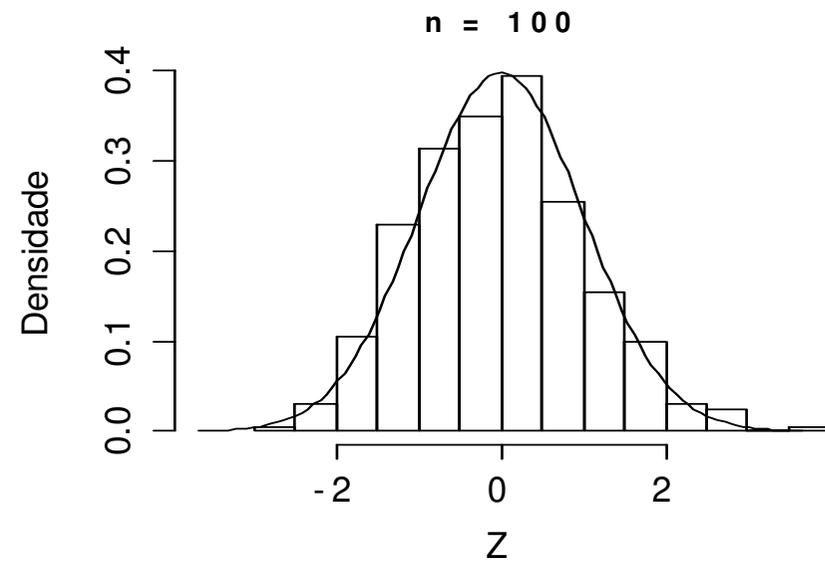
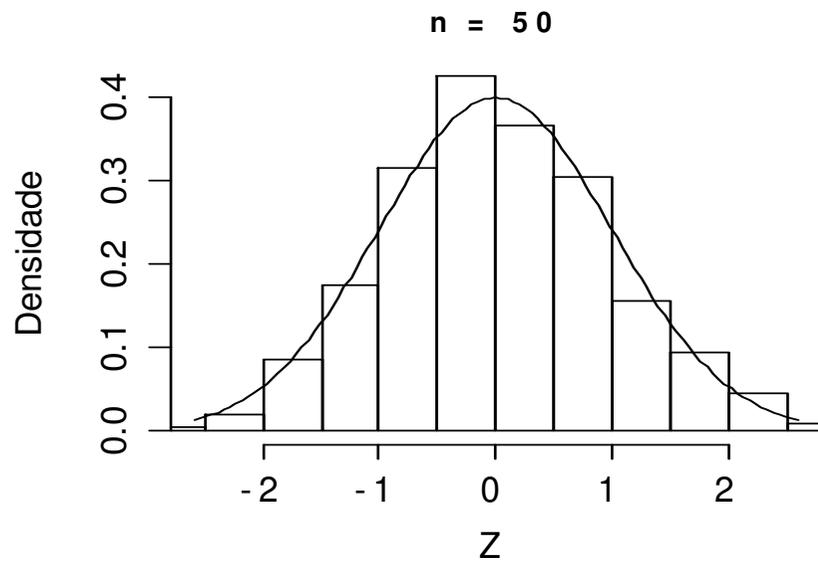
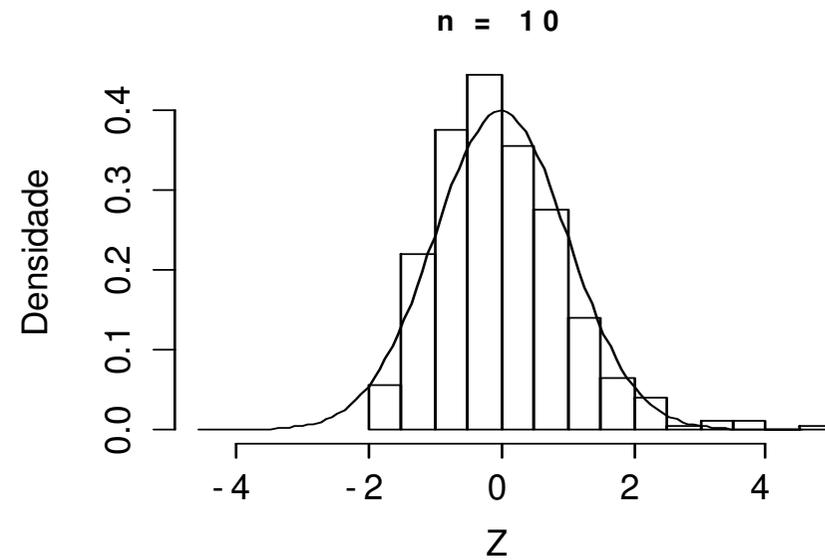
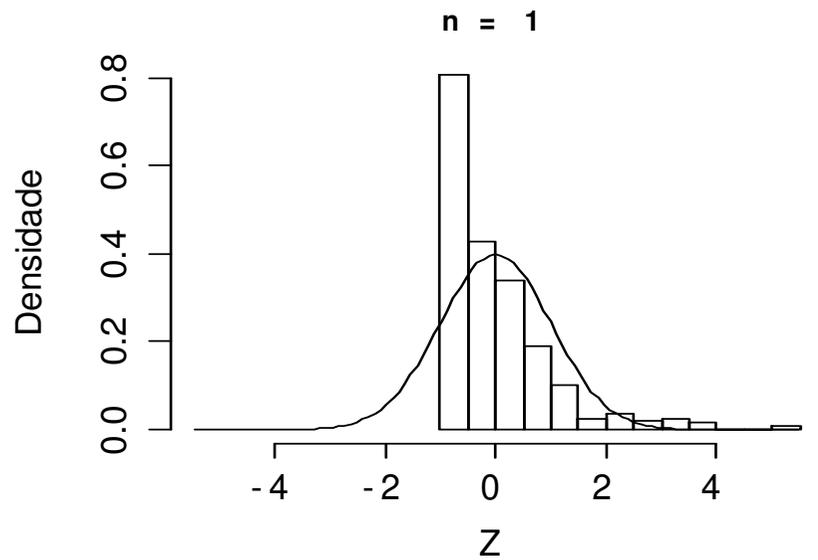
sendo que $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ é a média amostral.

Observações.

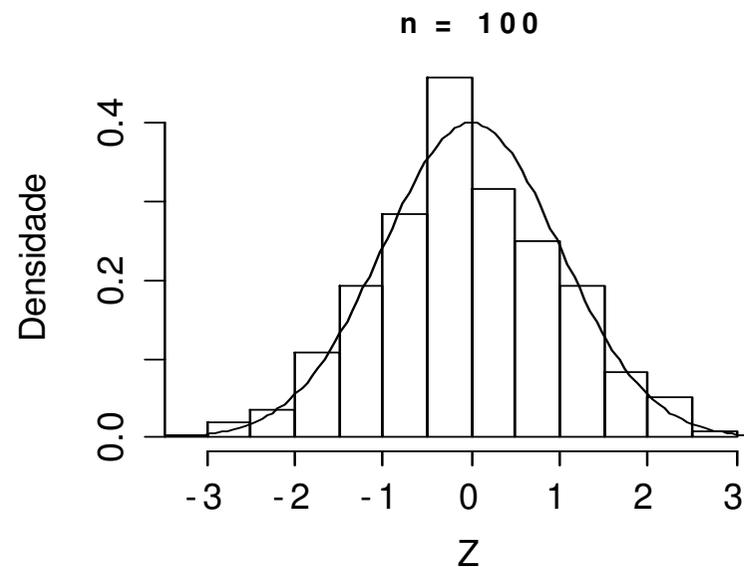
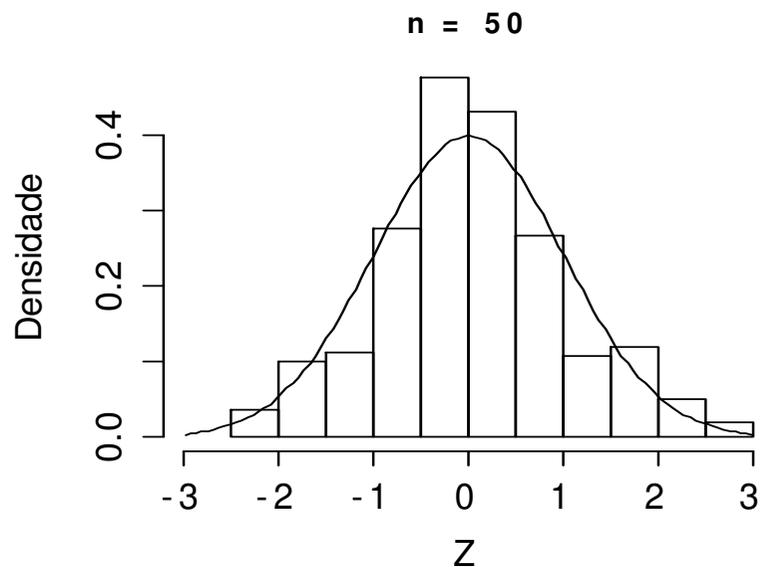
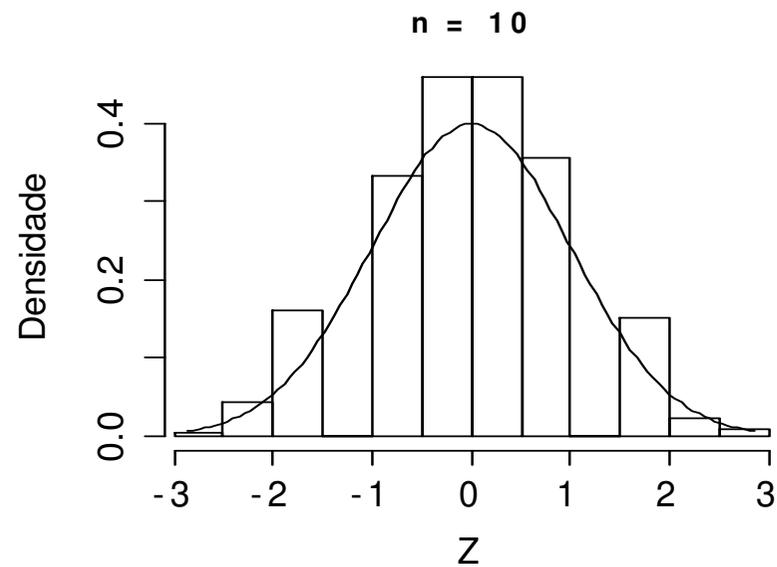
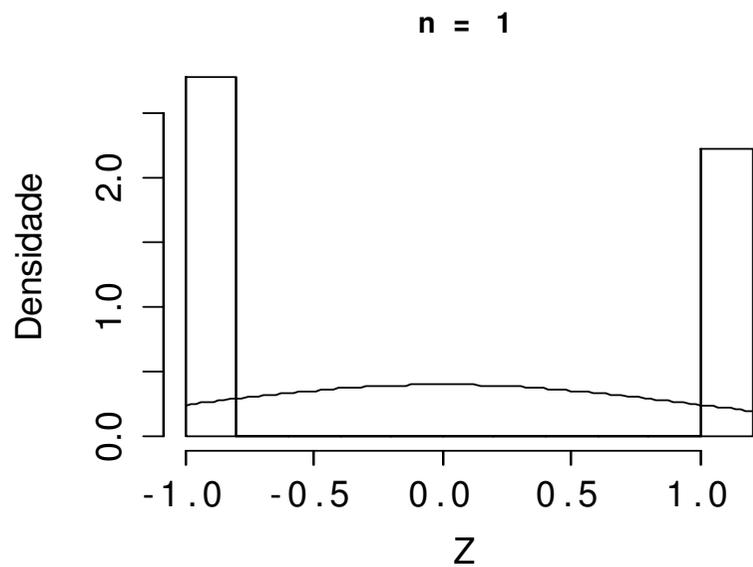
- (1) Quanto **maior** n , **melhor** a aproximação.
- (2) A distribuição das variáveis X pode ser **discreta** ou **contínua**.
- (3) A distribuição **aproximada** de

$$\sum_{i=1}^n X_i \text{ é } N(n\mu, n\sigma^2).$$

Teorema central do limite – Distribuição exponencial



Teorema central do limite – Distribuição Bernoulli ($p = 0,45$)



Exemplo

Após arredondamento para o inteiro mais próximo, 48 números são somados. Os erros de arredondamento individuais são uniformemente distribuídos no intervalo $(-0,5; 0,5)$. Qual a probabilidade de que a soma dos números arredondados seja diferente da verdadeira soma por mais de 3 unidades (em ambos os sentidos) ?

Solução. Utilizando o teorema central do limite obtemos uma solução aproximada.

X_i , $i = 1, \dots, 48$ são os erros de arredondamento tais que $X_i \sim U(-0,5; 0,5)$,

$E(X_i) = (-0,5 + 0,5) / 2 = 0$ e $\text{Var}(X_i) = [0,5 - (-0,5)]^2 / 12 = 1 / 12$ (veja lâmina 2).

O erro de arredondamento E é dado por $E = X_1 + X_2 + \dots + X_{48}$, sendo que a distribuição **aproximada** é $E \sim N(48 \times 0, 48 \times 1/12) = N(0,4)$.

Devemos calcular $P((E < -3) \cup (E > 3))$, que é igual a $P(E < -3) + P(E > 3)$.

Usando a distribuição aproximada, $P(E < -3) + P(E > 3) = 2 P(E < -3)$

$$= 2P\left(\frac{E - 0}{2} < \frac{-3 - 0}{2}\right) = 2P(Z < -1,50) = 2 \times 0,0668 = 0,1336.$$

5.4. Modelo de Weibull

Uma variável aleatória contínua X tem distribuição de Weibull com parâmetros de escala $\alpha > 0$ e forma $\beta > 0$ se sua função densidade é dada por

$$f(x) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\beta}}, \quad x \geq 0.$$

Função distribuição acumulada:

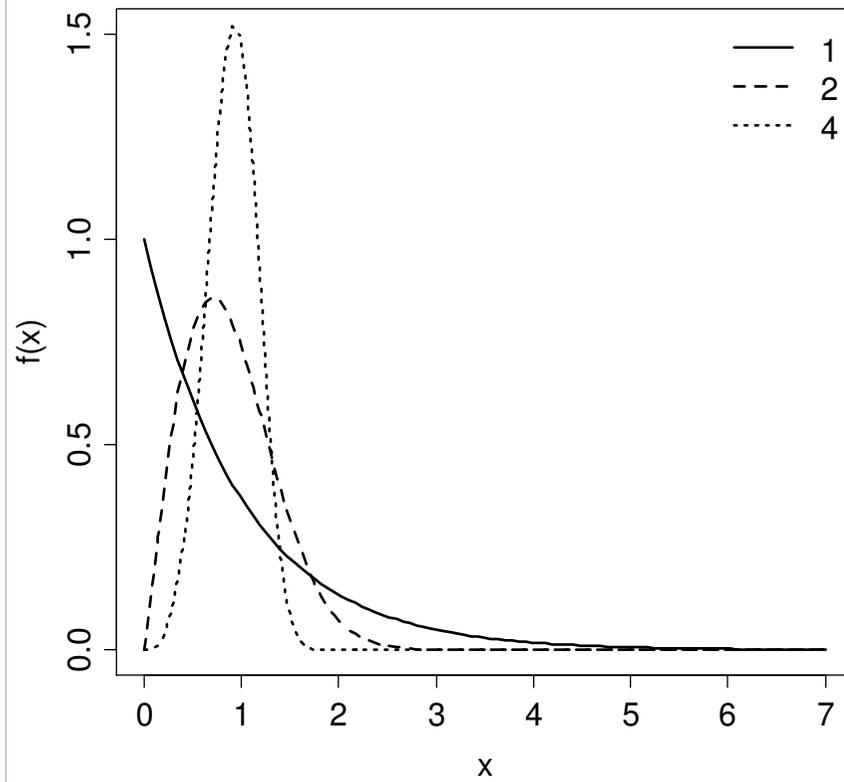
$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\beta}}, \quad x \geq 0.$$

Notação: $X \sim W(\alpha, \beta)$.

Obs. Se $\beta = 1$, $X \sim \text{Ex}(\alpha)$ (lâmina 5).

Exemplos

$\alpha = 1$



$\beta = 2$

