SCC-601– Introdução à Ciência da Computação II

Ordenação e Complexidade – Parte 5

Lucas Antiqueira

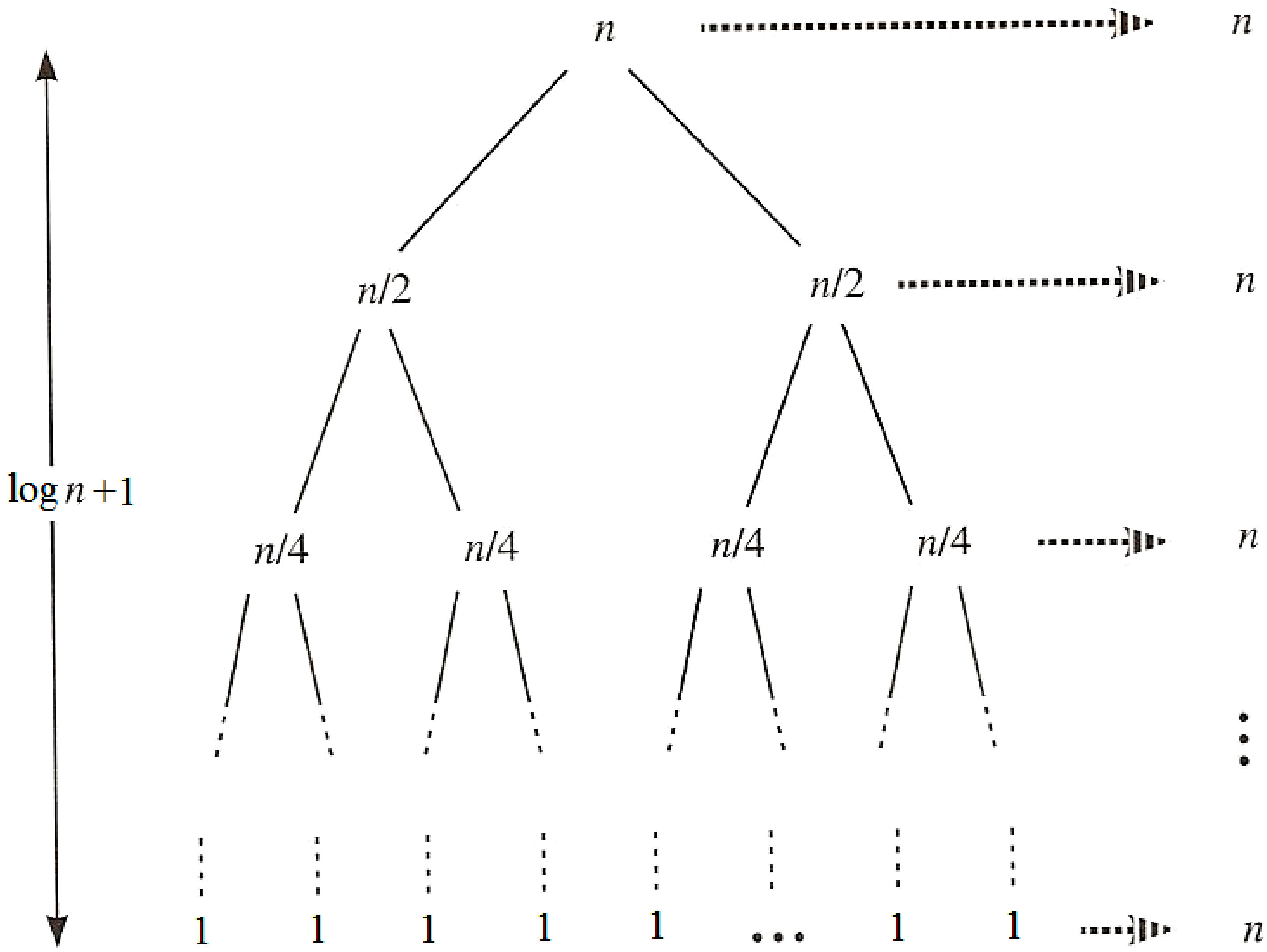
Árvore de Recorrência

- Cada nó representa o custo de um subproblema contido no conjunto de chamadas recursivas.

- Obtém-se o custo de cada nível da árvore. A seguir, soma-se todos esses custos a fim de determinar o custo total da recorrência.

- Árvores de recorrência são particularmente úteis quando a recorrência descreve o tempo de um algoritmo de divisão e conquista.

Exemplo: MergeSort



$$n(\log n + 1)$$

Total: $n \log n + n$

Solução de recorrências

Suponha que $F(1) = 1$ e F satisfaz a recorrência

$$F(n) = 2F(n-1) + 1$$

para todo $n \geq 2$.

Solução de recorrências

Suponha que $F(1) = 1$ e F satisfaz a recorrência

$F(n) = 2F(n-1) + 1$

para todo $n \geq 2$.

$$F(n) \quad = \quad 2F(n-1) + 1$$

Solução de recorrências

Suponha que $F(1) = 1$ e F satisfaz a recorrência

$F(n) = 2F(n-1) + 1$

para todo $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} F(n) &= 2F(n-1)+1 \\ &= 2(2F(n-2)+1)+1 \end{aligned}$$

Solução de recorrências

Suponha que $F(1) = 1$ e F satisfaz a recorrência

$F(n) = 2F(n-1) + 1$

para todo $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} F(n) &= 2F(n-1) + 1 \\ &= 2(2F(n-2) + 1) + 1 \\ &= 4F(n-2) + 3 \\ &= \cdots \end{aligned}$$

Solução de recorrências

Suponha que $F(1) = 1$ e F satisfaz a recorrência

$F(n) = 2F(n-1) + 1$

para todo $n \geq 2$.

$$
\begin{aligned}
F(n) &= 2F(n-1) + 1 \\
&= 2(2F(n-2) + 1) + 1 \\
&= 4F(n-2) + 3 \\
&= \cdots \\
&= 2^j F(n-j) + 2^j - 1
\end{aligned}
$$

Solução de recorrências

Suponha que $F(1) = 1$ e F satisfaz a recorrência

$F(n) = 2F(n-1) + 1$

para todo $n \geq 2$.

$$\begin{aligned}
F(n) &= 2F(n-1) + 1 \\
&= 2(2F(n-2) + 1) + 1 \\
&= 4F(n-2) + 3 \\
&= \cdots \\
&= 2^j F(n-j) + 2^j - 1 \\
&= 2^{n-1} F(1) + 2^{n-1} - 1\,.
\end{aligned}$$

Solução de recorrências

Suponha que $F(1) = 1$ e F satisfaz a recorrência

$$F(n) = 2F(n-1) + 1$$

para todo $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} F(n) &= 2F(n-1)+1 \\ &= 2(2F(n-2)+1)+1 \\ &= 4F(n-2)+3 \\ &= \cdots \\ &= 2^j F(n-j) + 2^j - 1 \\ &= 2^{n-1}F(1) + 2^{n-1} - 1\,. \end{aligned}$$

$$F(n) = 2^n - 1 \qquad \text{para todo } n \geq 1.$$

Solução de recorrências

Suponha que $F(1) = 1$ e F satisfaz a recorrência

$$F(n) = 2F(n-1) + 1$$

para todo $n \geq 2$.

***F*(*n*) é O(2^n)**

$$F(n) = 2^n - 1 \qquad \text{para todo } n \geq 1.$$

Solução de recorrências

Mostre por indução que:

$$F(n) = 2^n - 1 \qquad \text{para todo } n \geq 1.$$

Solução de recorrências

Mostre por indução que:

$$F(n) = 2^n - 1 \qquad \text{para todo } n \geq 1.$$

$$F(1) = 2^1 - 1 = 1$$

Solução de recorrências

Mostre por indução que:

$F(n) = 2^n - 1$ para todo $n \geq 1$.

$F(1) = 2^1 - 1 = 1$

Se $F(n) = 2^n - 1$ então devemos mostrar que $F(n+1) = 2^{n+1} - 1$:

Solução de recorrências

Mostre por indução que:

$F(n) = 2^n - 1$ para todo $n \geq 1$.

$F(1) = 2^1 - 1 = 1$

Se $F(n) = 2^n - 1$ então devemos mostrar que $F(n+1) = 2^{n+1} - 1$:

$$
\begin{aligned}
F(n+1) &= 2F(n) + 1 \\
&= 2(2^n - 1) + 1 \\
&= 2^{n+1} - 2 + 1 \\
&= 2^{n+1} - 1
\end{aligned}
$$

Solução de recorrências

- Outro exemplo:

$F(n) = 2F(\lfloor n/2 \rfloor) + n$

para todo $n \geq 2$.

$F(1) = 1$

Solução de recorrências

- Outro exemplo:

$$F(n) = 2F(\lfloor n/2 \rfloor) + n$$

para todo $n \geq 2$.

$$F(1) = 1$$

Essa recorrência é mais fácil de ser compreendida quando n é potência de 2. Nesse caso, $\lfloor n/2 \rfloor$ se reduz a $n/2$.

Solução de recorrências

Se $n = 2^j$, temos

$$F(2^j) = 2F(2^{j-1}) + 2^j$$

Solução de recorrências

Se $n = 2^j$, temos

$$\begin{aligned} F(2^j) &= 2F(2^{j-1}) + 2^j \\ &= 2^2F(2^{j-2}) + 2^1 2^{j-1} + 2^j \end{aligned}$$

Solução de recorrências

Se $n = 2^j$, temos

$$
\begin{aligned}
F(2^j) &= 2F(2^{j-1}) + 2^j \\
&= 2^2F(2^{j-2}) + 2^1 2^{j-1} + 2^j \\
&= 2^3F(2^{j-3}) + 2^2 2^{j-2} + 2^1 2^{j-1} + 2^j
\end{aligned}
$$

Solução de recorrências

Se $n = 2^j$, temos

$$\begin{aligned} F(2^j) &= 2F(2^{j-1}) + 2^j \\ &= 2^2F(2^{j-2}) + 2^1 2^{j-1} + 2^j \\ &= 2^3F(2^{j-3}) + 2^2 2^{j-2} + 2^1 2^{j-1} + 2^j \\ &= 2^j F(2^0) + 2^{j-1}2^1 + \cdots + 2^2 2^{j-2} + 2^1 2^{j-1} + 2^0 2^j \end{aligned}$$

Solução de recorrências

Se $n = 2^j$, temos

$$\begin{aligned}
F(2^j) &= 2F(2^{j-1}) + 2^j \\
&= 2^2F(2^{j-2}) + 2^1 2^{j-1} + 2^j \\
&= 2^3F(2^{j-3}) + 2^2 2^{j-2} + 2^1 2^{j-1} + 2^j \\
&= 2^j F(2^0) + 2^{j-1}2^1 + \cdots + 2^2 2^{j-2} + 2^1 2^{j-1} + 2^0 2^j \\
&= 2^j 2^0 + 2^{j-1}2^1 + \cdots + 2^2 2^{j-2} + 2^1 2^{j-1} + 2^0 2^j
\end{aligned}$$

Solução de recorrências

Se $n = 2^j$, temos

$$\begin{aligned}
F(2^j) &= 2F(2^{j-1}) + 2^j \\
&= 2^2F(2^{j-2}) + 2^1 2^{j-1} + 2^j \\
&= 2^3F(2^{j-3}) + 2^2 2^{j-2} + 2^1 2^{j-1} + 2^j \\
&= 2^jF(2^0) + 2^{j-1}2^1 + \cdots + 2^2 2^{j-2} + 2^1 2^{j-1} + 2^0 2^j \\
&= 2^j 2^0 + 2^{j-1}2^1 + \cdots + 2^2 2^{j-2} + 2^1 2^{j-1} + 2^0 2^j \\
&= (j+1)2^j
\end{aligned}$$

Solução de recorrências

Se $n = 2^j$, temos

$$\begin{aligned}
F(2^j) &= 2F(2^{j-1}) + 2^j \\
&= 2^2F(2^{j-2}) + 2^1 2^{j-1} + 2^j \\
&= 2^3F(2^{j-3}) + 2^2 2^{j-2} + 2^1 2^{j-1} + 2^j \\
&= 2^jF(2^0) + 2^{j-1}2^1 + \cdots + 2^2 2^{j-2} + 2^1 2^{j-1} + 2^0 2^j \\
&= 2^j 2^0 + 2^{j-1}2^1 + \cdots + 2^2 2^{j-2} + 2^1 2^{j-1} + 2^0 2^j \\
&= (j+1)2^j \\
&= j2^j + 2^j\,.
\end{aligned}$$

Solução de recorrências

Se $n = 2^j$, temos

$$\begin{aligned}
F(2^j) &= 2F(2^{j-1}) + 2^j \\
&= 2^2F(2^{j-2}) + 2^1 2^{j-1} + 2^j \\
&= 2^3F(2^{j-3}) + 2^2 2^{j-2} + 2^1 2^{j-1} + 2^j \\
&= 2^j F(2^0) + 2^{j-1}2^1 + \cdots + 2^2 2^{j-2} + 2^1 2^{j-1} + 2^0 2^j \\
&= 2^j 2^0 + 2^{j-1}2^1 + \cdots + 2^2 2^{j-2} + 2^1 2^{j-1} + 2^0 2^j \\
&= (j+1)2^j \\
&\boxed{= j2^j + 2^j\,.}
\end{aligned}$$

Exercício: Prove, por indução em *j*

Solução de recorrências

Se $n = 2^j$, temos

$$
\begin{aligned}
F(2^j) &= 2F(2^{j-1}) + 2^j \\
&= 2^2F(2^{j-2}) + 2^1 2^{j-1} + 2^j \\
&= 2^3F(2^{j-3}) + 2^2 2^{j-2} + 2^1 2^{j-1} + 2^j \\
&= 2^jF(2^0) + 2^{j-1}2^1 + \cdots + 2^2 2^{j-2} + 2^1 2^{j-1} + 2^0 2^j \\
&= 2^j 2^0 + 2^{j-1}2^1 + \cdots + 2^2 2^{j-2} + 2^1 2^{j-1} + 2^0 2^j \\
&= (j+1)2^j \\
&= j2^j + 2^j\,.
\end{aligned}
$$

Como $2^j = n, \quad F(n) = n \lg n + n$

$\lg n = \log_2 n$

Solução de recorrências

- Embora esta fórmula só se aplique às potências de 2, podemos usá-la para obter cotas superior e inferior válidas para todo n suficientemente grande.
- O primeiro passo nessa direção é verificar que *F* é crescente, ou seja, que

$$F(n) < F(n+1)$$

- Fica como exercício.

Solução de recorrências

Tome o único j em $\mathbb{N}$ tal que $2^j \leq n < 2^{j+1}$.

Sabemos que $F(n) < F(2^{j+1})$

Solução de recorrências

Tome o único j em $\mathbb{N}$ tal que $2^j \leq n < 2^{j+1}$.

Sabemos que $F(n) < F(2^{j+1})$

Já que $F(2^j) = (j+1)2^j$ então:

$F(2^{j+1}) = (j+2)2^{j+1} \leq 3j2^{j+1} = 6j2^j$

Solução de recorrências

Tome o único j em $\mathbb{N}$ tal que $2^j \leq n < 2^{j+1}$.

Sabemos que $F(n) < F(2^{j+1})$

Já que $F(2^j) = (j+1)2^j$ então:

$$F(2^{j+1}) = (j+2)2^{j+1} \leq 3j2^{j+1} = 6j2^j$$

Como $j \leq \lg n$, tem-se:

$$6j2^j \leq 6n \lg n$$

Solução de recorrências

Tome o único j em $\mathbb{N}$ tal que $2^j \leq n < 2^{j+1}$.

Sabemos que $F(n) < F(2^{j+1})$

Já que $F(2^j) = (j+1)2^j$ então:

$F(2^{j+1}) = (j+2)2^{j+1} \leq 3j2^{j+1} = 6j2^j$

Como $j \leq \lg n$, tem-se:

$6j2^j \leq 6n \lg n$

Cota superior

Portanto, $F(n) \leq 6n \lg n$ para todo $n \geq 2$.

Solução de recorrências

Cota inferior: $F(n) \geq \frac{1}{2} n \lg n$ para todo $n \geq 2$.

Solução de recorrências

Cota inferior: $F(n) \geq \frac{1}{2} n \lg n$ para todo $n \geq 2$.

Tome o único j em $\mathbb{N}$ tal que $2^j \leq n < 2^{j+1}$.

Solução de recorrências

Cota inferior: $F(n) \geq \frac{1}{2} n \lg n$ para todo $n \geq 2$.

Tome o único j em $\mathbb{N}$ tal que $2^j \leq n < 2^{j+1}$.

$$F(n) \geq F(2^j) = (j+1)2^j = \frac{1}{2}(j+1)2^{j+1}$$

Solução de recorrências

Cota inferior: $F(n) \geq \frac{1}{2} n \lg n$ para todo $n \geq 2$.

Tome o único j em $\mathbb{N}$ tal que $2^j \leq n < 2^{j+1}$.

$$F(n) \geq F(2^j) = (j+1)2^j = \frac{1}{2}(j+1)2^{j+1}$$

Como $\lg n < j+1$, temos $\frac{1}{2}(j+1)2^{j+1} > \frac{1}{2} n \lg n$.

Solução de recorrências

Cota inferior: $F(n) \geq \frac{1}{2} n \lg n$ para todo $n \geq 2$.

Tome o único j em $\mathbb{N}$ tal que $2^j \leq n < 2^{j+1}$.

$$F(n) \geq F(2^j) = (j+1)2^j = \frac{1}{2}(j+1)2^{j+1}$$

Como $\lg n < j+1$, temos $\frac{1}{2}(j+1)2^{j+1} > \frac{1}{2} n \lg n$.

Dadas as cotas superior e inferior, temos que F(n) é Θ(n lg n)

Teorema mestre

Sejam $a \geq 1$, $b \geq 2$, $k \geq 0$ e $n_0 \geq 1$ números naturais, e seja c um número real estritamente positivo:

$$F(n) = a\,F\left(\frac{n}{b}\right) + cn^k$$

para n = $n_0 b^1$, $n_0 b^2$, $n_0 b^3$, ...

Teorema mestre

Sejam $a \geq 1$, $b \geq 2$, $k \geq 0$ e $n_0 \geq 1$ números naturais, e seja c um número real estritamente positivo:

$$F(n) = a\,F\left(\frac{n}{b}\right) + cn^k$$

para n = $n_0 b^1$, $n_0 b^2$, $n_0 b^3$, ...

Suponha que $F(n)$ é assintoticamente não decrescente, então:

$$\begin{aligned}
&\text{se } \lg a / \lg b > k \text{ então } F \text{ está em } \Theta(n^{\lg a / \lg b}),\\
&\text{se } \lg a / \lg b = k \text{ então } F \text{ está em } \Theta(n^k \lg n),\\
&\text{se } \lg a / \lg b < k \text{ então } F \text{ está em } \Theta(n^k).
\end{aligned}$$

Teorema mestre

Sejam $a \geq 1$, $b \geq 2$, $k \geq 0$ e $n_0 \geq 1$ números naturais, e seja c um número real estritamente positivo:

$$F(n) = a\,F\left(\frac{n}{b}\right) + c\,n^k$$

para n = n_0b^1 , n_0b^2 , n_0b^3 , ...

Suponha que $F(n)$ é assintoticamente não decrescente, então:

se $\lg a / \lg b > k$ então F está em $\Theta(n^{\lg a / \lg b})$,

$\boxed{\text{se } \lg a / \lg b = k \text{ então } F \text{ está em } \Theta(n^k \lg n),}$

se $\lg a / \lg b < k$ então F está em $\Theta(n^k)$.

MergeSort

Teorema mestre

Exemplo 1:

$F(n) = F(\lfloor n/2 \rfloor) + 2F(\lceil n/2 \rceil) + cn$ para todo $n \geq 2$

Teorema mestre

Exemplo 1:

$$F(n) = F(\lfloor n/2 \rfloor) + 2F(\lceil n/2 \rceil) + cn \text{ para todo } n \geq 2$$

$$F(n) = 3F(n/2) + cn$$

Teorema mestre

Exemplo 1:

$$F(n) = F(\lfloor n/2 \rfloor) + 2F(\lceil n/2 \rceil) + cn \text{ para todo } n \geq 2$$

$$F(n) = 3F(n/2) + cn$$

a=3
b=2 $\longrightarrow$ $\lg a / \lg b = \lg 3 / \lg 2 > 1 = k$
k=1

Teorema mestre

Exemplo 1:

$$F(n) = F(\lfloor n/2 \rfloor) + 2F(\lceil n/2 \rceil) + cn \text{ para todo } n \geq 2$$

$$F(n) = 3F(n/2) + cn$$

a=3
b=2 $\longrightarrow$ $\lg a / \lg b = \lg 3 / \lg 2 > 1 = k$
k=1

Então $\Theta(n^{\lg a / \lg b}) = \Theta(n^{\lg 3/\lg 2}) = \Theta(n^{\lg 3}) \approx \Theta(n^{1,6})$

Teorema mestre

Exemplo 2:

$$F(n) = aF\left(\lfloor n/2 \rfloor\right) + cn^k \text{ para todo } n \geq 1$$

$$\boxed{a > 2^k}$$

Teorema mestre

Exemplo 2:

$$F(n) = aF(\lfloor n/2 \rfloor) + cn^k \text{ para todo } n \geq 1$$

$$\boxed{a > 2^k}$$

$$a > 2^k$$

b=2 $\longrightarrow$ $\lg a > k$

$$\lg a / \lg 2 > k$$

$$\lg a / \lg b > k$$

Teorema mestre

Exemplo 2:

$F(n) = aF(\lfloor n/2 \rfloor) + cn^k$ para todo $n \geq 1$

$\boxed{a > 2^k}$

$$a > 2^k$$

b=2 $\longrightarrow$ $\lg a > k$

$$\lg a / \lg 2 > k$$

$$\lg a / \lg b > k$$

Então $\Theta(n^{\lg a/\lg b}) = \Theta(n^{\lg a/\lg 2}) = \Theta(n^{\lg a})$

Análise probabilística

- Exemplo:

Suponha dado um vetor $A[1..n]$ que contém uma permutação de $1..n$. Considere o problema de encontrar o valor máximo do vetor $A[1..n]$. O seguinte algoritmo resolve o problema:

```
MÁXIMO (A, n)
max ← 0
para i crescendo de 1 até n faça
    se A[i] > max
        então max ← A[i]
devolva max
```

Análise probabilística

- Exemplo:

Suponha dado um vetor $A[1..n]$ que contém uma permutação de $1..n$. Considere o problema de encontrar o valor máximo do vetor $A[1..n]$. O seguinte algoritmo resolve o problema:

```
MÁXIMO (A, n)
1   max ← 0
2   para i crescendo de 1 até n faça
3       se A[i] > max
4           então max ← A[i]
5   devolva max
```

Quantas vezes a linha 4 é executada?
No pior caso, n vezes.
No melhor caso, uma vez.
Na média? Será que é $n/2$?

Análise probabilística

- Seja X a variável aleatória que dá o número total de execuções da linha 4 quando $A[1..n]$ é uma permutação aleatória uniforme de $1..n$

- Cada permutação tem probabilidade $1/n!$

Análise probabilística

- Seja X a variável aleatória que dá o número total de execuções da linha 4 quando $A[1..n]$ é uma permutação aleatória uniforme de $1..n$
- Cada permutação tem probabilidade $1/n!$
- Queremos calcular a esperança (valor esperado) $E[X]$ da variável X.
- Por definição, essa esperança é a soma $\sum_{1 \leq k \leq n} k \Pr[X=k]$, sendo $\Pr[X=k]$ a probabilidade de que a linha 4 seja executada exatamente k vezes.

Análise probabilística

- É mais fácil fazer os cálculos a partir das variáveis X_i definidas a seguir

- A variável X é igual à soma $X_1 + \ldots + X_n$, sendo cada X_i a variável aleatória definida como:
  Se "$max \leftarrow A[i]$" é executado, então $X_i = 1$, senão $X_i = 0$.

Análise probabilística

- É mais fácil fazer os cálculos a partir das variáveis X_i definidas a seguir

- A variável X é igual à soma $X_1 + \ldots + X_n$, sendo cada X_i a variável aleatória definida como:
  Se "$max \leftarrow \mathrm{A}[i]$" é executado, então $X_i = 1$, senão $X_i = 0$.

- O valor esperado de X_i é igual à probabilidade de que $A[i]$ seja máximo em $A[1..i]$:
  $\mathrm{E}[X_i] = 1/i$.

Análise probabilística

- Pela linearidade da esperança,
  $E[X] = E[X_1] + E[X_2] + \ldots + E[X_n]$
  $E[X] = 1/1 + 1/2 + \ldots + 1/n$

Análise probabilística

- Pela linearidade da esperança,
  $E[X] = E[X_1] + E[X_2] + \ldots + E[X_n]$
  $E[X] = 1/1 + 1/2 + \ldots + 1/n$

- Como $1/1+1/2+\ldots+1/n$ fica entre $\ln n$ e $\ln n + 1$,
  $E[X]$ está em $\Theta(\ln n)$

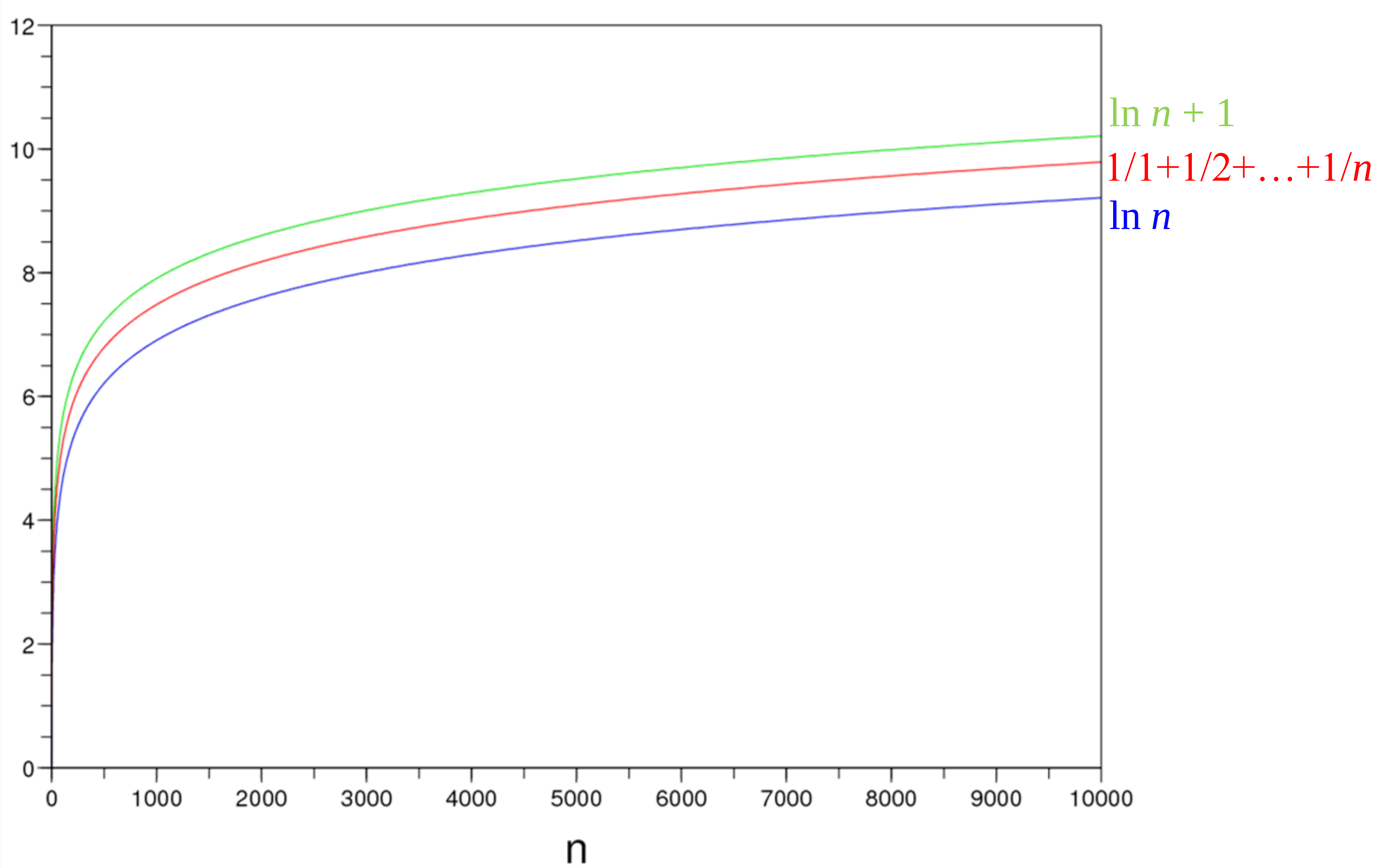
Análise probabilística

- Pela linearidade da esperança,
  $E[X] = E[X_1] + E[X_2] + \ldots + E[X_n]$
  $E[X] = 1/1 + 1/2 + \ldots + 1/n$

- Como $1/1+1/2+\ldots+1/n$ fica entre $\ln n$ e $\ln n + 1$,
  $E[X]$ está em $\Theta(\ln n)$

Logaritmo na base *e*

Análise probabilística



Análise probabilística

- Tarefa para casa:

  Encontrar a prova de que

  $\ln n \leq 1/1+1/2+\ldots+1/n \leq \ln n + 1$

Créditos

- Aula baseada no material do prof. Paulo Feofiloff: http://www.ime.usp.br/~pf/analise_de_algoritmos/