7. INTERVALOS DE CONFIANÇA

2010

Estimação por intervalos

$X_1,...,X_n$ é uma amostra aleatória de uma variável cuja distribuição depende do parâmetro θ.

Se $L(X_1,...,X_n)$ e $U(X_1,...,X_n)$ são duas funções tais que $L < U$ e $P(L \leq \theta \leq U) = 1 - \alpha$,

o intervalo $[L, U]$ é chamado de intervalo de confiança (IC) de $100(1-\alpha)\%$ para θ.

$100(1-\alpha)\%$ é o coeficiente de confiança do intervalo. Deve ser "alto".

O coeficiente de confiança é escolhido (90%, 95% e 99% são comuns). Em seguida calculamos L e U.

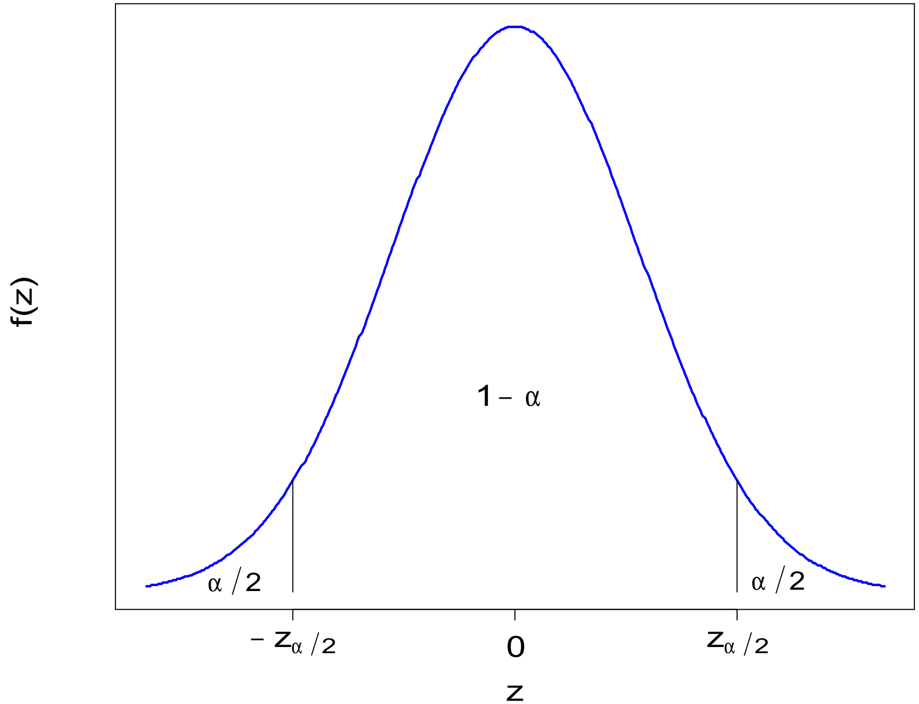
IC para uma média populacional

$X_1, \cdots X_n$ é uma amostra aleatória de tamanho n de uma população normal com média μ (desconhecida) e variância σ^2 (conhecida). Vimos que a média amostral $\bar{X}$, tem distribuição normal com média μ e variância σ^2/n. Isto é,

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0,1).$$

Se a distribuição de X não é normal, o resultado acima é válido aproximadamente.

Logo, fixando um coeficiente de confiança $(1-\alpha)$, pode-se determinar $z_{\alpha/2}$ (consultando a tabela normal):



IC para uma média populacional

Sendo assim, $P(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$,

que equivale a $P\left(-z_{\alpha/2} \leq \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \leq z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$

$$\Leftrightarrow \ P\left(-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X}-\mu \leq z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow \ P\left(\bar{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha \, .$$

Logo, um IC de 100 (1-α)% para a média μ é dado por

$$[L;U] = \left[\bar{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \left[\bar{X}-E;\bar{X}+E\right],$$

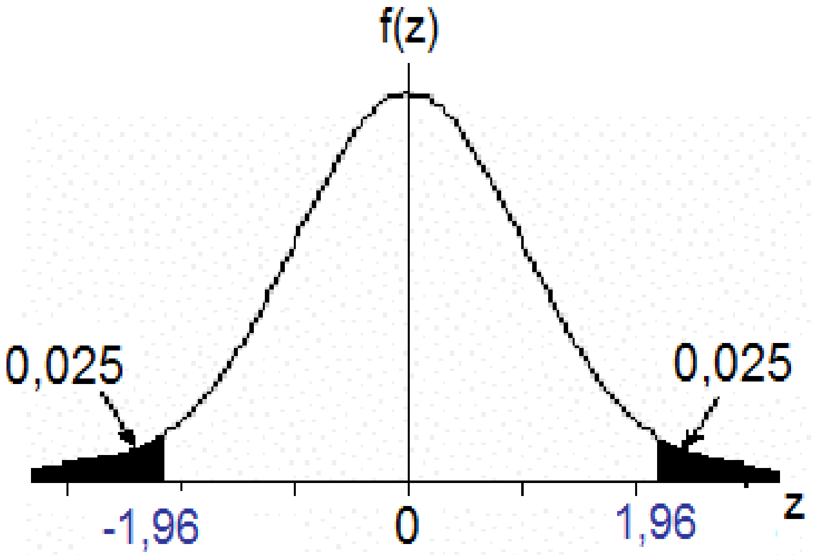
sendo que $E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ é o erro máximo

e a amplitude do IC é U – L = 2E.

Exemplo

Em uma fábrica de cerveja a quantidade de cerveja em latas seguia uma distribuição normal com média 350 ml e desvio padrão 3 ml. Após alguns problemas na linha de produção, suspeita-se que houve alteração na média. Uma amostra de 20 latas forneceu uma média de 346 ml. Obtenha um intervalo de 95% para a quantidade média de cerveja envasada supondo que não tenha ocorrido alteração na variabilidade.

Como $1-\alpha = 0{,}95$, temos da tabela normal padrão $z_{0,025} = 1{,}96$.



Obtemos IC = [L; U]

$$= \left[\bar{X} - 1{,}96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + 1{,}96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

$$= \left[346 - 1{,}96 \times \frac{3}{\sqrt{20}} ; 346 + 1{,}96 \times \frac{3}{\sqrt{20}} \right] = \left[346 - 1{,}31 ; 346 + 1{,}31 \right] = \left[344{,}69 ; 347{,}31 \right], \text{ em ml.}$$

Determinação do tamanho da amostra para estimação de μ

Erro máximo (E) na estimação de μ: $$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

$z_{\alpha/2}$ é obtido da tabela normal após a escolha do coeficiente de confiança ($1 - \alpha$).

(a) Especificamos o erro máximo. Se o desvio padrão (σ) for conhecido, podemos calcular n:

$$n = \frac{z^2_{\alpha/2} \times \sigma^2}{E^2}.$$

(b) Especificamos o erro máximo . Se o desvio padrão (σ) não for conhecido, podemos utilizar o desvio padrão obtido de uma amostra piloto com n_0 observações:

$$n \cong \frac{z^2_{\alpha/2} \times s_0^2}{E^2},$$ sendo que s_0^2 é a variância amostral da amostra piloto.

(c) Especificamos o erro máximo em função do desvio padrão como $E = k\,\sigma$:

$$n = \frac{z^2_{\alpha/2}}{k^2}.$$

Exemplo

Em uma siderúrgica estuda-se a resistência média de barras de aço utilizadas na construção civil. Qual o tamanho amostral necessário para garantir que um erro máximo de 8 kg seja superado com probabilidade igual a 0,01? O desvio padrão da resistência para este tipo de barra é de 25 kg.

Solução. Do enunciado tem-se σ = 25 kg, E = 8 kg e

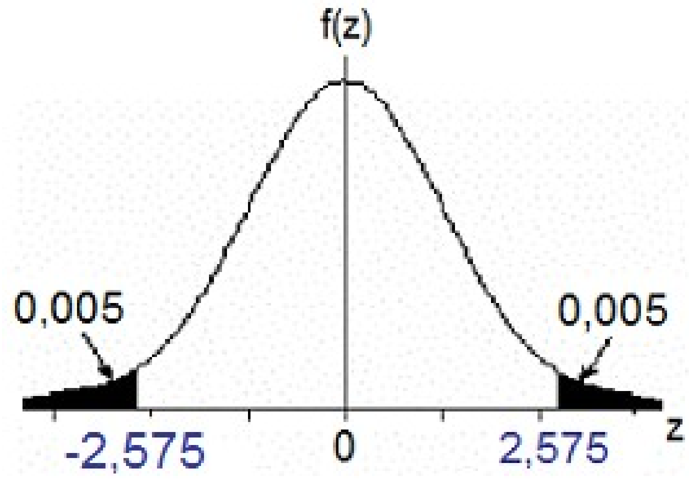
$$1 - P(\overline{X} - E \leq \mu \leq \overline{X} + E) = 0{,}01 \Rightarrow P(\overline{X} - E \leq \mu \leq \overline{X} + E) = 1 - 0{,}01,$$

ou seja, α = 0,01 (o coeficiente de confiança do IC é $1 - \alpha = 99\%$).

Consultando a tabela normal encontramos $z_{\alpha/2}$ = 2,575.

$$\text{Portanto, } n = \frac{z^2_{\alpha/2} \times \sigma^2}{E^2}$$

$$= \frac{2{,}575^2 \times 25^2}{8^2} = 65.$$



IC para uma média populacional (σ desconhecido)

Se a variável de interesse (X) tem distribuição normal, então

$$T = \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu)}{s} \sim t_{n-1},$$: distribuição t de Student com $n - 1$ g.l.,

sendo que *s* é o desvio padrão amostral.

Se a distribuição de X não é normal, o resultado acima é válido aproximadamente.

Um IC de 100(1-α)% para μ é dado por

$$[L;U] = [\overline{X} - E; \overline{X} + E], \text{ em que } E = t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

IC para a média e testes de hipóteses

O teste da hipótese H_0: $\mu = \mu_0$ contra H_1: $\mu \neq \mu_0$ a um nível de significância α pode ser efetuado utilizando um IC com coeficiente de confiança igual a $1 - \alpha$.

Construímos o IC de $100(1-\alpha)\%$ para μ, dado por

$$[L;U] = [\bar{X} - E; \bar{X} + E], \quad \text{em que } E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$: σ conhecido.

$$\text{ou} \quad E = t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}$$: σ desconhecido.

Se $\mu_0 \notin$ IC, rejeitamos H_0; caso contrário, não rejeitamos H_0.

Exemplo (p. 28 em Montgomery *et al.*, 2004)

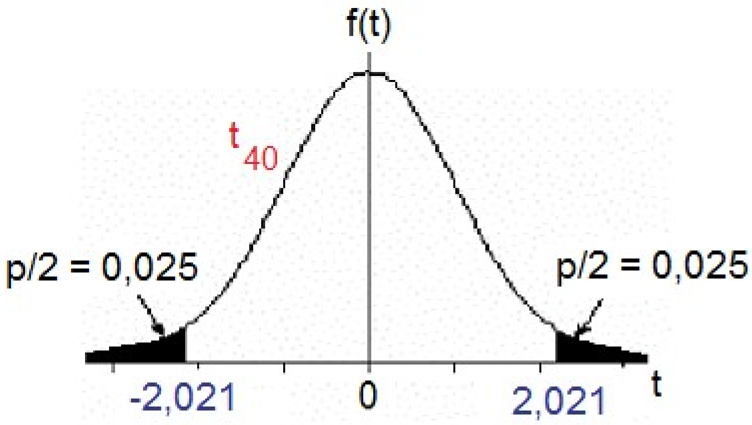
Foram coletados dados de viscosidade (em u.v.) de um líquido produzido em batelada. Resultados de 40 amostras encontram-se abaixo. Apresente um IC de 95% para a viscosidade média. Podemos concluir que a viscosidade média da população é igual a 15,5?

Dados: `13,3 14,5 15,3 15,3 14,3 14,8 15,2 14,5 14,6 14,1 14,3 16,1 13,1 15,5 12,6 14,6 14,3 15,4 15,2 16,8 14,9 13,7 15,2 14,5 15,3 15,6 15,8 13,3 14,1 15,4 15,2 15,2 15,9 16,5 14,8 15,1 17,0 14,9 14,8 14,0.`

Solução. Inicialmente calculamos

$$\bar{X} = \frac{1}{40}\sum_{i=1}^{40} X_i = 14{,}875 \text{ e } s = \sqrt{\frac{1}{40-1}\sum_{i=1}^{40}\left(X_i - 14{,}875\right)^2} = 0{,}948.$$

Pelo enunciado, n = 40 e $1 - \alpha = 0{,}95$, de modo que $\alpha = 0{,}05$. Da tabela (Tábua III) com 40 g.l. (39 g.l. não estão na Tábua III) e p = 5%, obtemos $t_{\alpha/2} = 2{,}021$.



Exemplo (p. 28 em Montgomery *et al*., 2004)

Logo, o erro máximo (E) é igual

$$E = t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} = 2{,}021\frac{0{,}948}{\sqrt{40}} = 0{,}303$$

e o IC de 95% para a média da população é dado por

$$[L;U] = [\overline{X} - E; \overline{X} + E] = [14{,}875 - 0{,}303; 14{,}875 + 0{,}303] = [14{,}57; 15{,}18].$$

Como μ_0 = 15,5 $\notin$ IC, rejeitamos H_0: μ = 15,5 em favor de H_1: $\mu \neq$ 15,5.

Conclusão. Com base nos dados coletados e adotando um nível de significância de 5%, não há evidência de que a viscosidade média da população seja igual a 15,5.

Exemplo. Solução em Excel

	A	B	C	D	E
1	13,3		Média =	14,9	
2	14,5		Desvio padrão =	0,9483	
3	15,3				
4	15,3		Confiança =	0,95	
5	14,3		n =	40	
6	14,8		$t_{\alpha/2}$ =	2,023	
7	15,2		Erro máximo =	0,303	
	14,5				
	14,6		Limites do	Inferior	Superior
	14,1		IC	14,57	15,18
	14,3				
	16,1				
	13,1				
	15,5				
	12,6				
	14,6				
	14,3				
	15,4				
	15,2				
	16,8				
	14,9				
	13,7				
	15,2				
	14,5				
	15,3				
	15,6				
	15,8				
	13,3				
	14,1				
	15,4				
	15,2				
	15,2				
	15,9				
	16,5				
	14,8				
	15,1				
	17,0				
	14,9				
39	14,8				
40	14,0				

Média: =MÉDIA(A:A)

Desvio padrão: =DESVPADA(A:A)

n: =CONT.SE(A:A; "> 0")

$t_{\alpha/2}$: =INVT(1 – $D$4; $D$5 – 1)

Erro máximo: =$D$6 * $D$2 / RAIZ($D$5)

Limite inferior: =$D$1 – $D$7

Limite superior: =$D$1 + $D$7

IC para uma proporção populacional

Cada observação pode ser classificada como sucesso (X = 1) ou insucesso (X = 0) e a probabilidade de sucesso é p. Dispomos de uma amostra aleatória $X_1 \ldots$, X_n. Vimos que

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\overline{p} - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \sim N(0,1), \quad \text{aproximadamente,}$$

sendo que $\overline{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$: proporção amostral de sucessos.

Para um nível confiança fixado em 100(1-α)%, obtemos (veja lâmina 4)

$$\mathrm{P}\left(\overline{p} - z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq p \leq \overline{p} + z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) \cong 1 - \alpha \ .$$

IC para uma proporção populacional

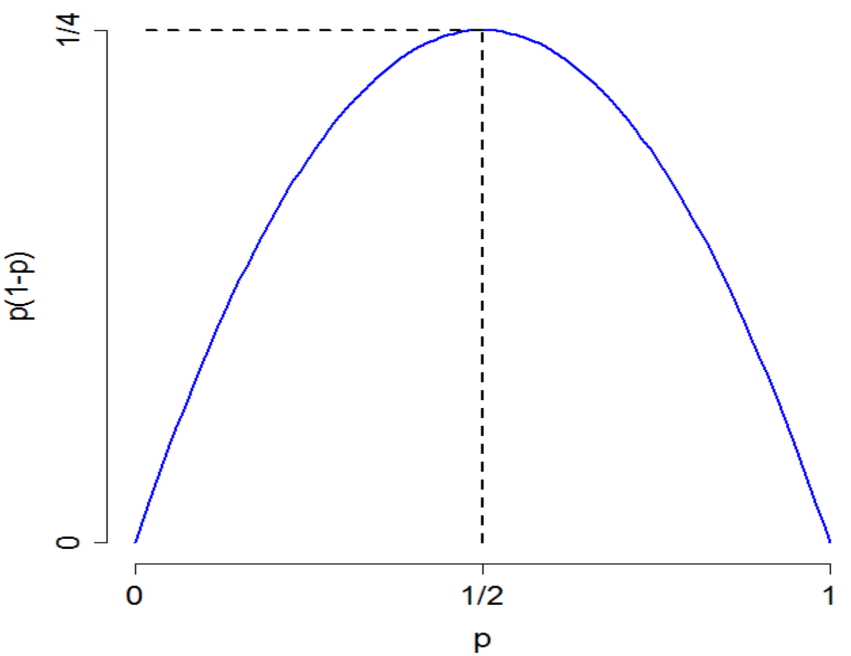
(a) Abordagem otimista

Substituir $p(1\text{-}p)$ por $\bar{p}(1-\bar{p})$:

$$IC \cong \left[\bar{p} - z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}};\ \bar{p} + z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}\right].$$

(b) Abordagem conservativa

Substituir p(1 – p) por ¼, que corresponde ao valor máximo de p(1 – p).



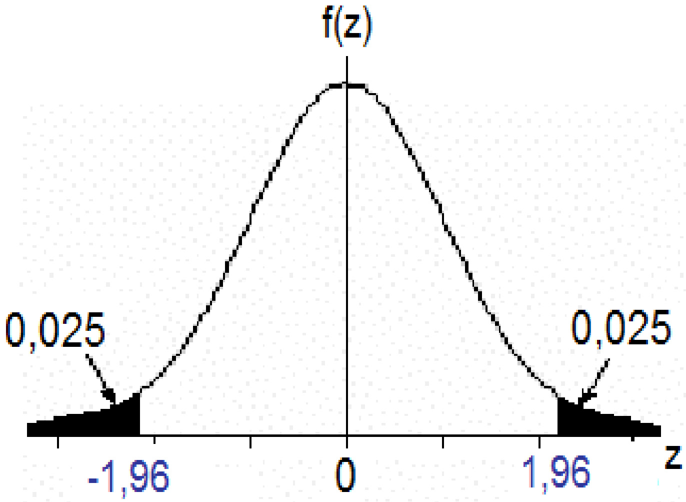
$$IC \cong \left[\bar{p} - z_{\alpha/2} \times \frac{1}{\sqrt{4n}};\ \bar{p} + z_{\alpha/2} \times \frac{1}{\sqrt{4n}}\right].$$

Exemplo

Um estudo foi realizado para determinar a proporção de componentes de um certo tipo que resistem durante um certo período a condições de uso mais rigorosas do que as especificadas. Em uma amostra de 200 componentes selecionados ao acaso, 160 resistiram. Apresente um intervalo de 95% de confiança para a proporção de componentes que resistem.

Solução. Estimativa pontual de p: $\bar{p} = \dfrac{160}{200} = 0{,}8\ (80\%)$.

Como $1 - \alpha = 0{,}95$, obtemos da tabela normal padrão $z_{0,025} = 1{,}96$.



Abordagem otimista:

$$IC \cong \left[0{,}8 - 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}8(1-0{,}8)}{200}}; 0{,}8 + 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}8(1-0{,}8)}{200}}\right]$$

$$= [0{,}745; 0{,}855].$$

Abordagem conservativa:

$$IC \cong \left[0{,}8 - 1{,}96 \times \frac{1}{\sqrt{4 \times 200}};\ 0{,}8 + 1{,}96 \times \frac{1}{\sqrt{4 \times 200}}\right] = [0{,}731; 0{,}869].$$

Determinação do tamanho da amostra para estimação de p

Erro máximo de estimação de p é fixado:

$$E = z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{z^2_{\alpha/2} \times p(1-p)}{E^2}.$$

(a) Há informação sobre p: p* (estudos anteriores, especialistas, amostra piloto, etc):

$$n = \frac{z^2_{\alpha/2} \times p^*(1-p^*)}{E^2}.$$

(b) Não há informação sobre p:

p(1 – p) é substituído pelo valor máximo, igual a ¼ (veja lâmina 15):

$$n = \frac{z^2_{\alpha/2}}{4E^2} = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{2E}\right)^2.$$

Coeficiente de confiança de 95%: $\alpha = 5\%$, $z_{\alpha/2} = 1{,}96 \cong 2$ e

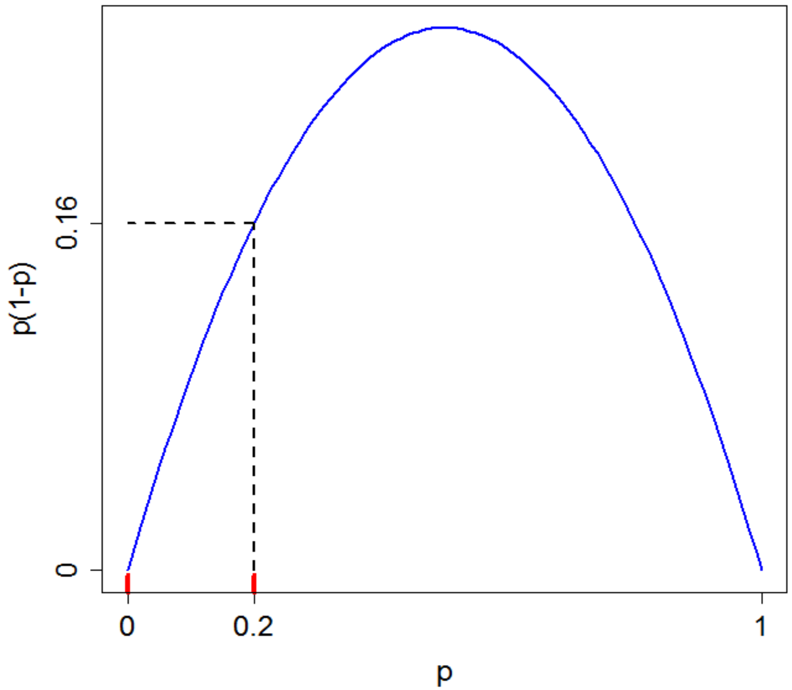
$n \cong 1 / E^2$.

Exemplo

Uma equipe pretende estimar a proporção de avarias ocorridas no transporte de um produto. Estudos anteriores indicam que esta proporção não ultrapassa 20%. Que tamanho de amostra é necessário para assegurar com uma confiança de 99% que o erro de estimação desta proporção seja no máximo igual a 0,05?

Solução. Do enunciado obtemos $p \leq 0,2$, $1 - \alpha = 0,99$ e $E = 0,05$. Da tabela normal padrão, $z_{0,005} = 2,575$.

Proteção em relação à situação mais desfavorável: $p^* = 0,20$.



Finalmente,

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2 \times p^*(1 - p^*)}{E^2}$$

$$= \frac{2,575^2 \times 0,2 \times (1 - 0,2)}{0,05^2}$$

$$= 424,4 \Rightarrow n = 425.$$