$2^{\underline{a}}$ LISTA DE EXERCÍCIOS DE PROBABILIDADE II - SME0801

Professora Juliana Cobre

Entregar Exercício 13

Exercício 1. Suponha que as dimensões, X e Y, de uma chapa retangular de metal, possam ser consideradas variáveis aleatórias contínuas independentes, com as seguintes fdp:

$$X : f(x) = \begin{cases} x-1,\ 1 < x \leq 2, \\ -x+3,\ 2 < x < 3, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

$$Y : g(y) = \begin{cases} \frac{1}{2},\ 2 < y < 4 \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Ache a fdp da área da chapa, $A = XY$.

Exercício 2. Admita que X represente a duração da vida de um dispositivo eletrônico e suponha que X seja uma variável aleatória contínua com fdp

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1000}{x^2},\ x > 1000, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Sejam X_1 e X_2 duas determinações independentes da variável aleatória X acima. (Isto é, suponha que estejamos ensaiando a duração da vida de dois desses dispositivos.) Ache a fdp da variável aleatória $Z = X_1/X_2$.

Exercício 3. A intensidade luminosa em um dado ponto é dada pela expressão até o ponto dado. Suponha que C seja uniformemente distribuída sobre (1,2), enquanto D seja uma variável aleatória contínua com fdp $f(d) = \mathrm{e}^{-d}, d > 0$. Ache a fdp de I, admitindo que C e D sejam independentes. (*Sugestão*: Primeiro ache a fdp de D^2 e depois aplique os resultados aprendidos em aula)

Exercício 4. A variável X tem função de distribuição F. Para $Y = X^2$, obtenha $F_Y(y)$

Exercício 5. Sejam X e $Y \sim N(0,1)$, independentes. Obtenha a densidade de $2X + Y$.

Exercício 6. Sejam X e $Y \sim Exp(1)$, independentes. Obtenha a densidade de $X - Y$.

Exercício 7. A densidade conjunta de (X,Y) é $f(x,y) = 2(x+y), 0 < x < y < 1$.

(a) Determine a densidade de $X + Y$.
(b) Calcule $P(X + Y > 1)$.
(c) Obtenha $P(X + Y > 1 | \frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3})$.

Exercício 8. A densidade conjunta de (X,Y) é dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4\pi}-y},\ -\infty < x < \infty, y \leq 0; \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Verifique se X e Y são independentes.
(b) Determine a densidade conjunta de Y e $X + Y$.

Exercício 9. Mostre que, sendo X e Y variáveis independentes com distribuição Poisson de parâmetros λ_1 e λ_2, respectivamente, temos que

(a) A soma $X + Y$ é Poisson.
(b) A distribuição condicional de X, dada a soma $X + Y$ é Binomial.

Exercício 10. Seja $X \sim N(0,1)$ e defina $Y = \mathrm{e}^X$. A variável Y segue o modelo *Lognormal* de parâmetros 0 e 1. Obtenha a densidade de Y.

Exercício 11. As variáveis X e Y são independentes e têm distribuição Uniforme Contínua em 0,1]. Obtenha as densidades de:

(a) $X + Y$
(b) $X - Y$
(c) $|X - Y|$
(d) X/Y
(e) $X/(X + Y)$

Exercício 12. Sendo X e Y variáveis independentes com distribuição Uniforme contínua em $(1, \beta)$, obtenha a densidade de XY via método do Jacobiano.

Exercício 13. Sejam X_1 e X_2 variáveis independentes com densidade Gama de parâmetros (α, λ) e (β, λ), respectivamente. Mostre que

(a) $W = X_1/(X_1 + X_2)$ tem densidade Beta de parâmetros (α, β).
(b) $T = X_1 + X_2$ tem densidade Gama de parâmetros $(\alpha + \beta, \lambda)$.
(c) W e T são independentes.