8. Medidas de associação

2011

Dados: (x_i, y_i), i = 1,...,n. n pares de observações das variáveis x e y, que podem ser qualitativas ou quantitativas.

Os pares representam a ocorrência simultânea de x e y. Cada par (x_i, y_i) é indissociável.

Em várias situações há interesse em estudar a relação entre x e y, se existir.

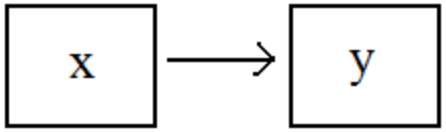
Uma possível relação entre x e y pode ser quantificada por uma medida resumo: medida de associação.

A associação entre variáveis pode ser negativa ou positiva (sentido). E fraca ou forte (intensidade ou força).

Gráficos são úteis no estudo de associação entre variáveis.

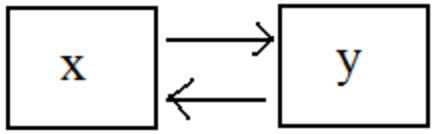
Tipos de relação

(a) Causal unilateral. y depende de x (ou x depende de y).



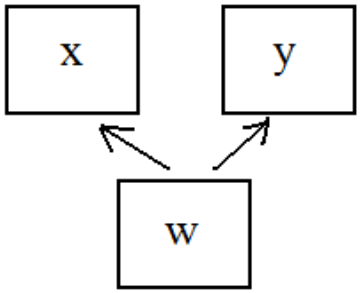
Exemplo. O preço de venda de um produto (y) depende da distância entre o local de produção e o local de venda (x). x depende de y?

(b) Causal bilateral ou interdependência. y depende de x e x depende de y.



Exemplo. Relação entre peso (y) e altura (x) de uma pessoa.

(c) Dependência indireta (ou associação espúria). x e y são influenciadas por outra(s) variável(is).

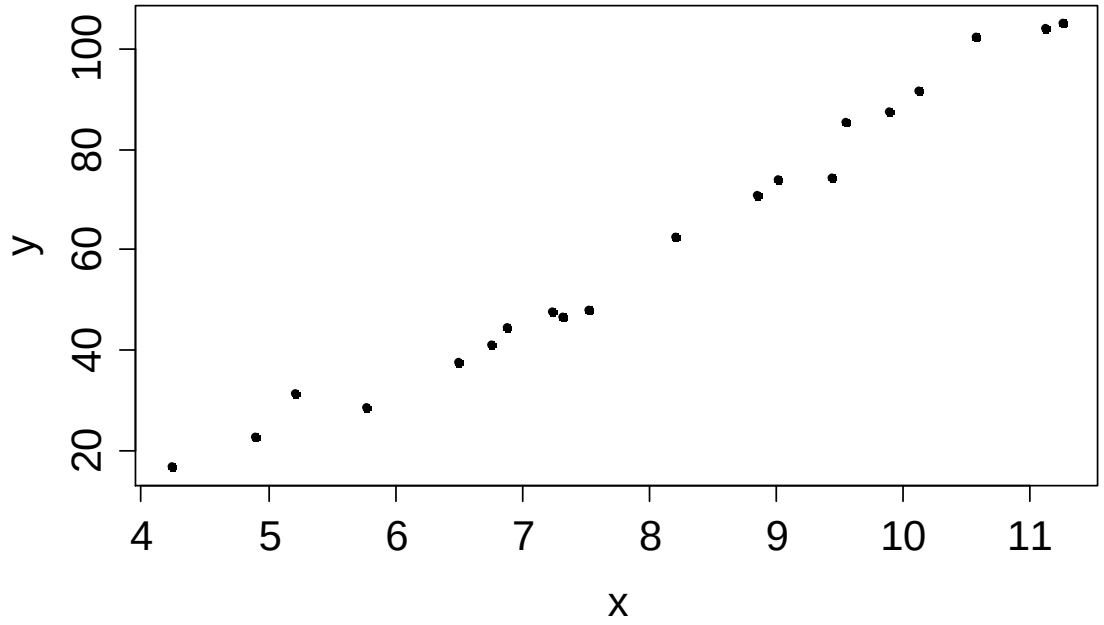


Exemplo. Relação entre o número anual de casos de insolação (x) e a produção anual de trigo (y). Causa comum: temperatura (w).

8.1. Variáveis quantitativas

(x_1,y_1), ..., (x_n,y_n): conjunto de dados bivariado.

Representação gráfica: gráfico de dispersão (*scatter plot*). Gráfico cartesiano dos pares (x_i,y_i), i = 1,...,n.



Covariância entre x e y: medida da variação conjunta (ou concomitante ou simultânea) de x e y em relação às suas médias.

$$\mathrm{cov}(x,y) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}), \quad -\infty < \mathrm{cov}(x,y) < \infty.$$

8.1. Variáveis quantitativas

Obs. (a) cov(x, y) = cov(y, x) e (b) cov(x, x) = s_x^2.

Coeficiente de correlação linear de Pearson (r):

$$\text{cor}(x, y) = r = \frac{\text{cov}(x, y)}{s_x s_y} = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{s_x s_y},$$

sendo que s_x e s_y denotam os desvios padrão de x e y. Se $s_x = 0$ e/ou $s_y = 0$, r não está definido.

Propriedades: P1. cor(x, x) = 1. P2. $-1 \leq r \leq 1$.

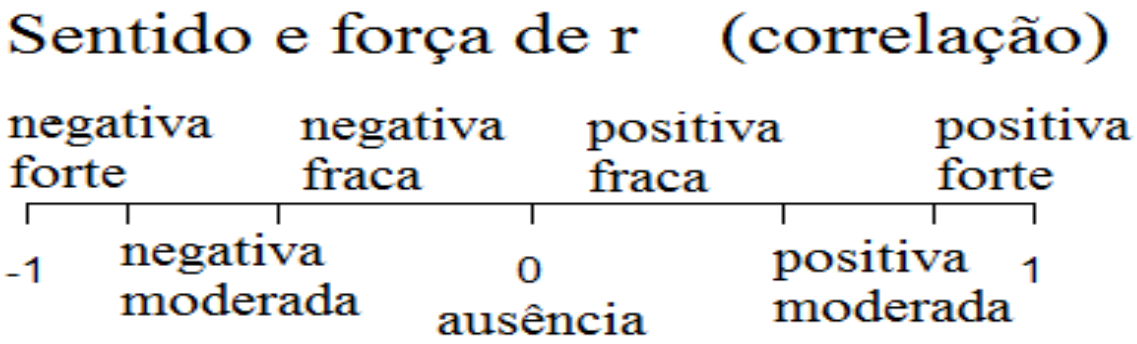
P3. r = 1 se, e somente se, a relação entre x e y for linear (y = a + bx) e b > 0.

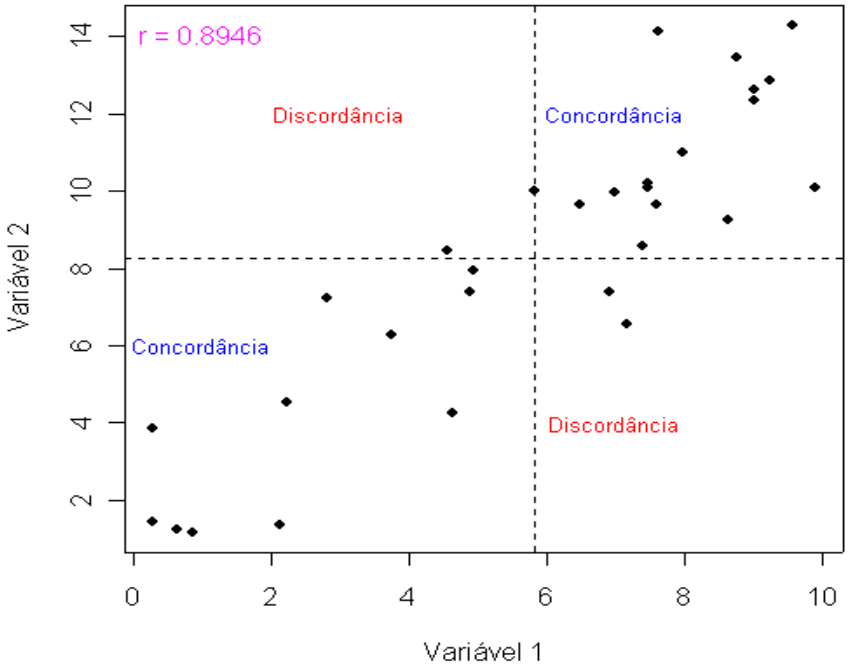
P4. r = – 1 se, e somente se, a relação entre x e y for linear (y = a + bx) e b < 0.

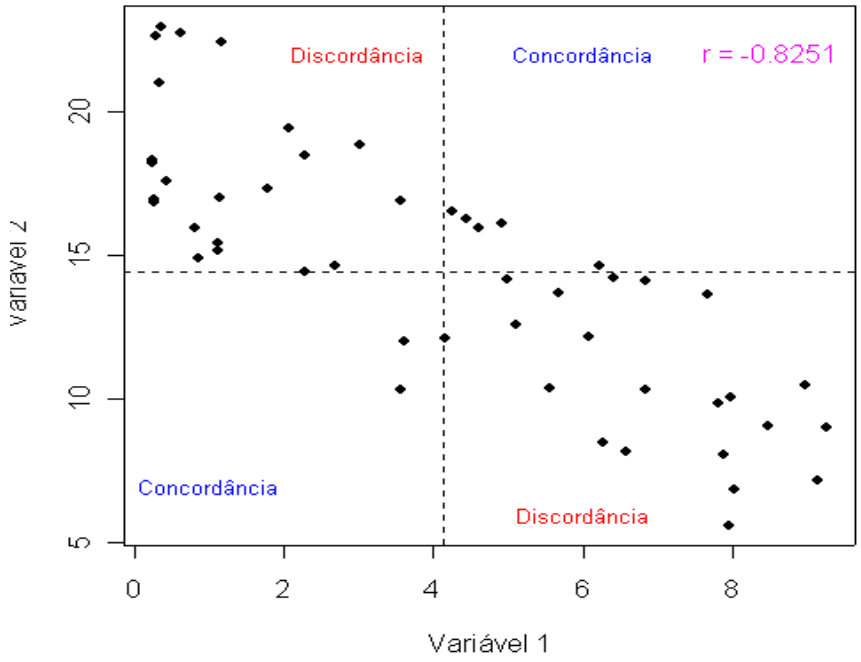
P5. Invariância. Se $b_1 > 0$ e $b_2 > 0$, então cor(x,y) = cor($a_1 + b_1x$, $a_2 + b_2y$), em que a_1 e a_2 são reais quaisquer.

Exercício. Se $b_1 < 0$ e $b_2 > 0$ ou $b_1 > 0$ e $b_2 < 0$ ou $b_1 < 0$ e $b_2 < 0$, o que se pode afirmar sobre cor($a_1 + b_1x$, $a_2 + b_2y$)?

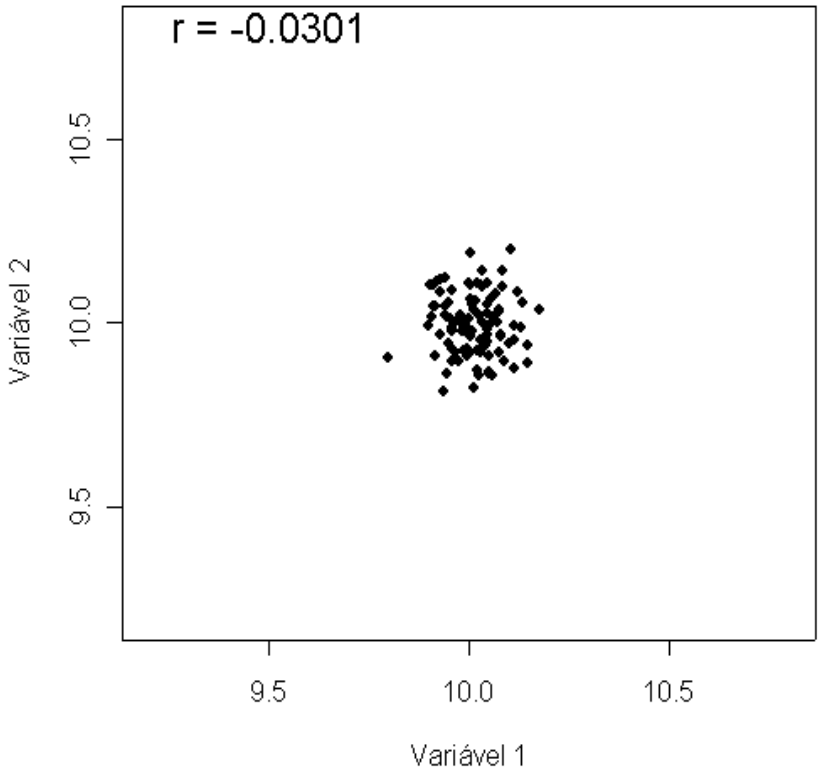
8.1. Variáveis quantitativas

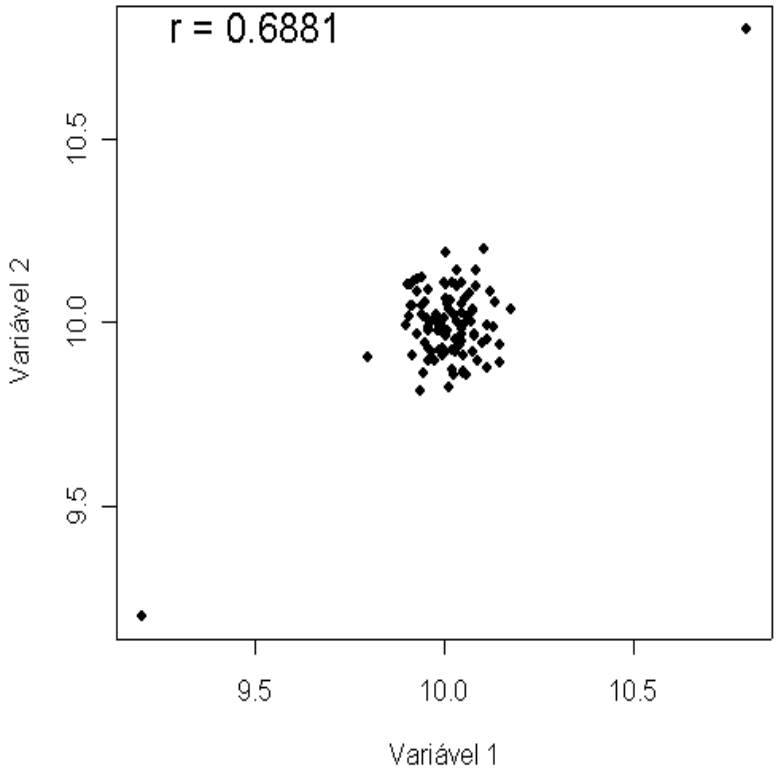




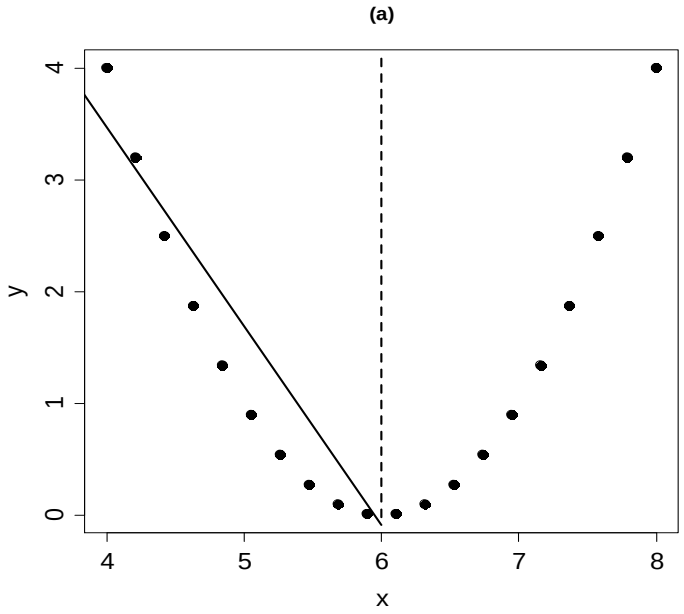


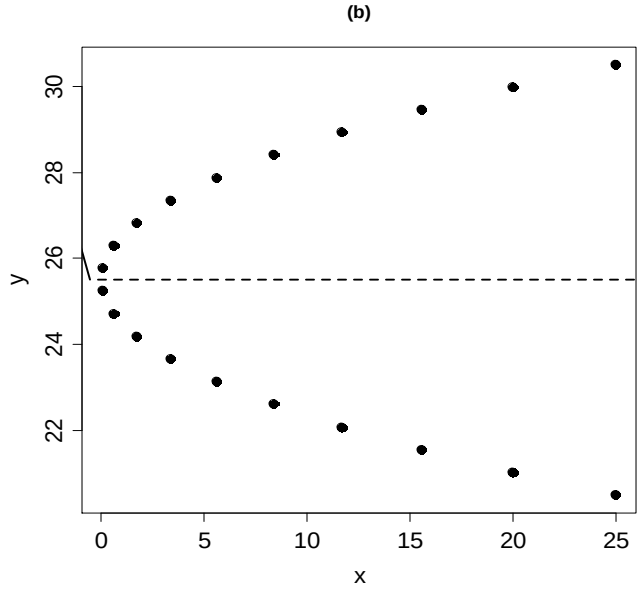
8.1. Variáveis quantitativas

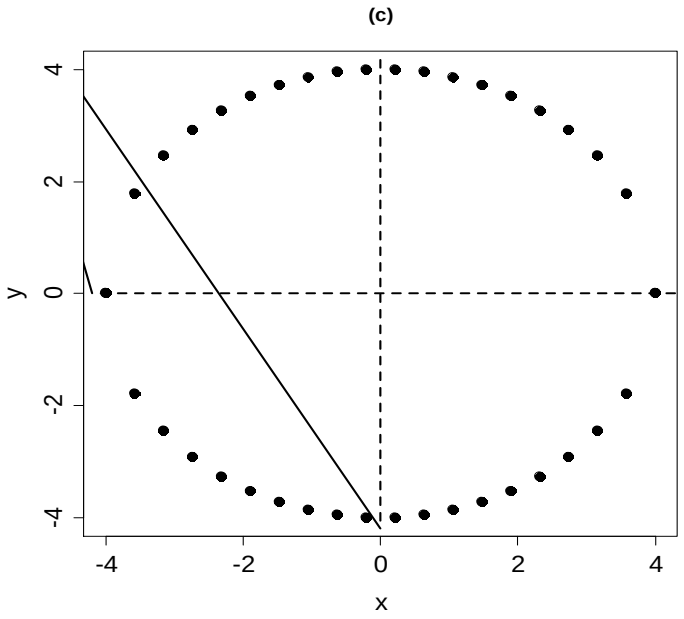


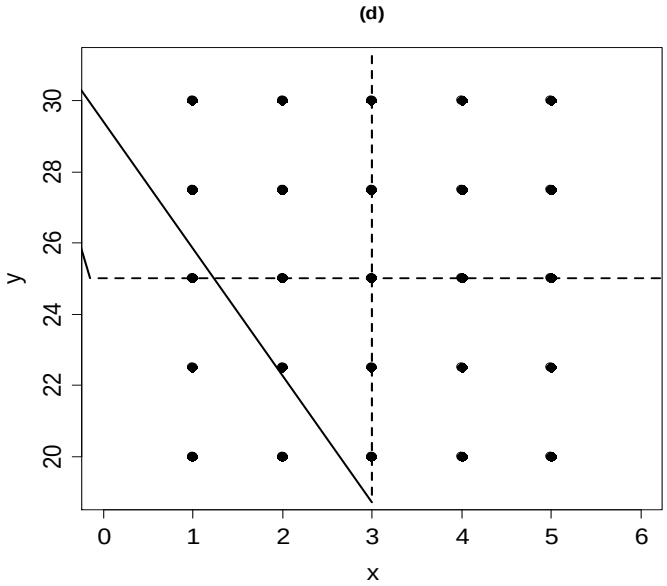


8.1. Variáveis quantitativas





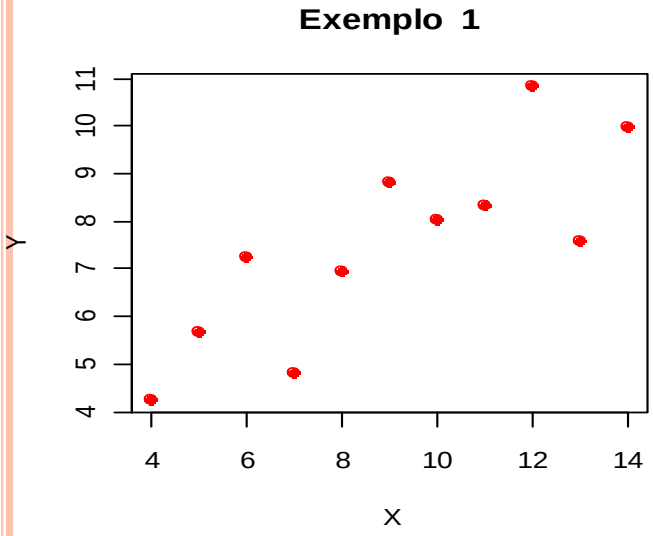


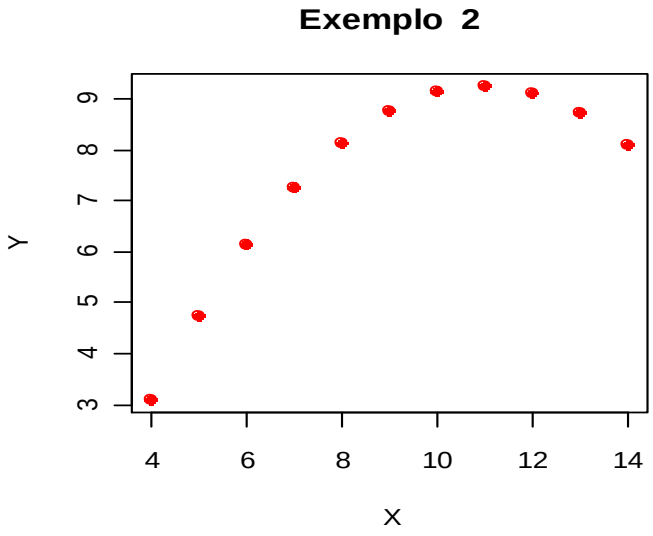


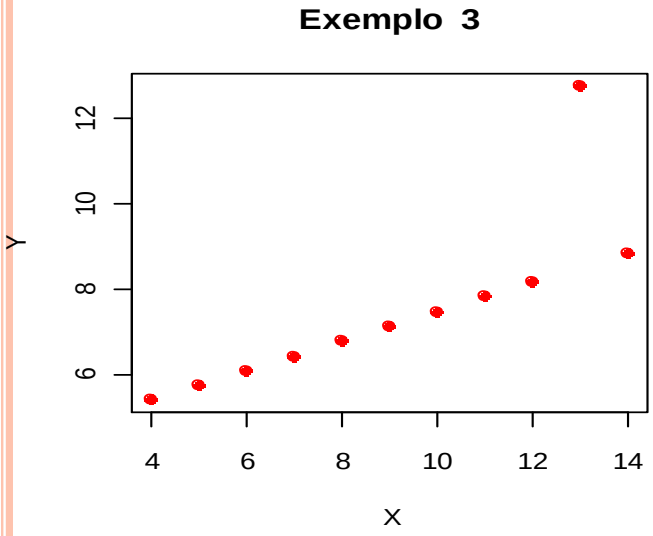
Exercício. Prove que se houver simetria em x e/ou y, então r = 0.

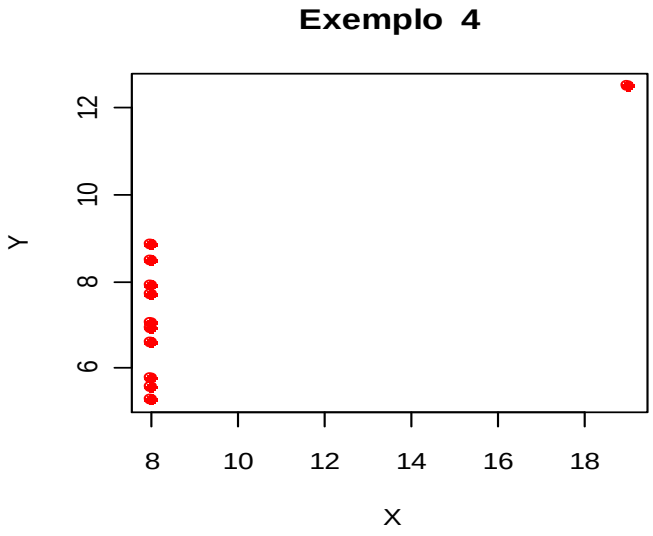
Obs. r = 0 não significa ausência de associação.

8.1. Variáveis quantitativas









Dados anscombe em R

```
> ?anscombe
```

Valores de r:

Exemplo 1: 0,8164

Exemplo 2: 0,8162

Exemplo 3: 0,8163

Exemplo 4: 0,8165

Veja também http://www.jerrydallal.com/LHSP/corr.htm

Correlação em R

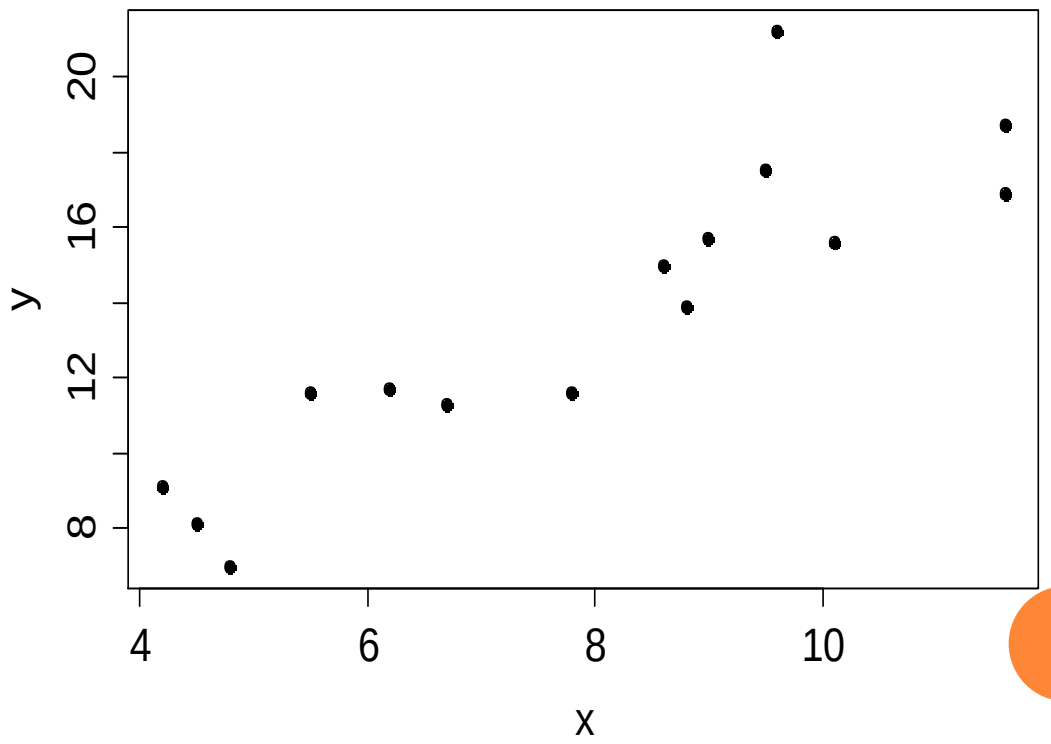
Funções `cor`, `cov` e `cov2cor`.

```
> x = c(5.5,6.7,9.5,4.2,9.0,11.6,4.5,9.6,6.2,11.6,8.8,8.6,7.8,4.8,
10.1)
> y = c(11.6,11.3,17.5,9.1,15.7,16.9,8.1,21.2,11.7,18.7,13.9,15.0,
11.6,7.0, 15.6)
```

```
> length(x)
[1] 15
```

```
> cor(x, y)
[1] 0.8908723
```

```
> plot(x, y, pch = 20)
```



Correlação em R

```
> ? USArrests

Description

This data set contains statistics, in arrests per 100,000 residents
for assault, murder, and rape in each of the 50 US states in 1973.
Also given is the percent of the population living in urban areas.
```

Número de prisões por assalto, homicídio e estupro por 100 000 hab. e proporção da população urbana.

```
> names(USArrests)

[1] "Murder"   "Assault"  "UrbanPop" "Rape"
```

```
> class(USArrests)

[1] "data.frame"
```

Classe “folha de dados”.

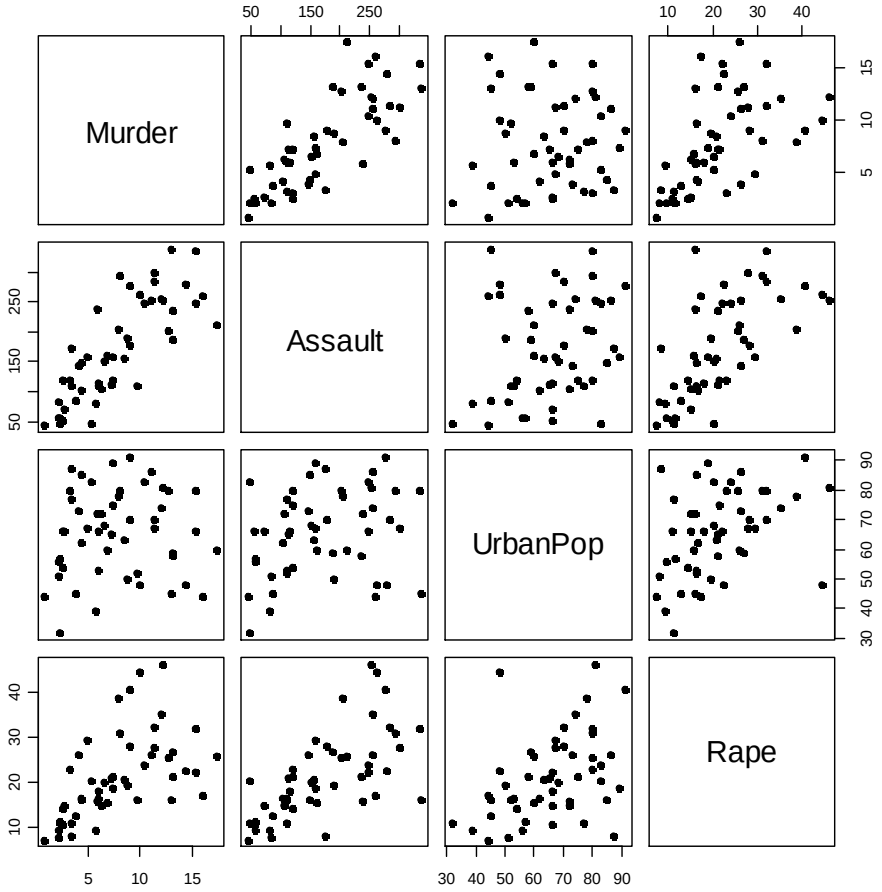
```
> rownames(USArrests)

 [1] "Alabama" "Alaska" "Arizona” "Arkansas“ "California“ etc
 [50] "Wyoming"
```

```
> summary(USArrests)

 Murder          Assault         UrbanPop          Rape
 Min.   : 0.800   Min.   : 45.0   Min.   :32.00   Min.   : 7.30
 1st Qu.: 4.075   1st Qu.:109.0   1st Qu.:54.50   1st Qu.:15.07
 Median : 7.250   Median :159.0   Median :66.00   Median :20.10
 Mean   : 7.788   Mean   :170.8   Mean   :65.54   Mean   :21.23
 3rd Qu.:11.250   3rd Qu.:249.0   3rd Qu.:77.75   3rd Qu.:26.18
 Max.   :17.400   Max.   :337.0   Max.   :91.00   Max.   :46.00
```

Correlação em R

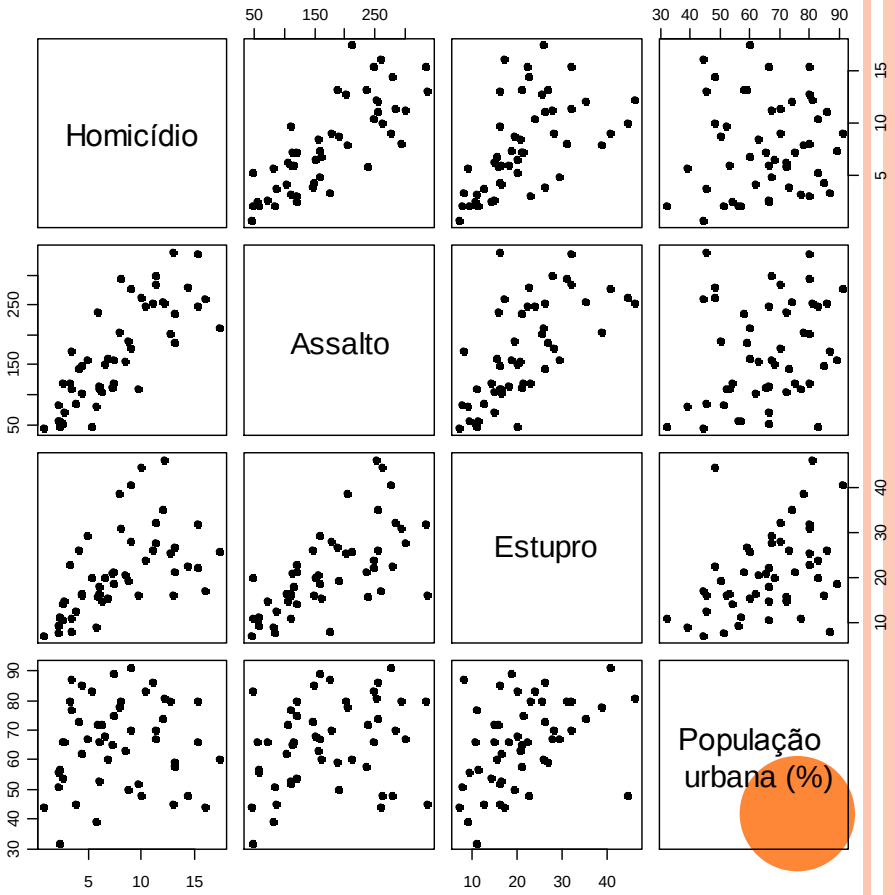
Gráficos de dispersão: função `pairs`.

```
> pairs(USArrests, pch = 20)
```



Matriz de gráficos de dispersão (*scatter plot matrix*).

```
> ordem = c("Murder", "Assault",
"Rape", "UrbanPop")

> nomes = c("Homicídio", "Assalto",
"Estupro", "População \n urbana (%)")

> pairs(USArrests[, ordem], pch = 20,
labels = nomes)
```



Correlação em R

Matriz de covariâncias:

```
> cov(USArrests[, ordem])
             Murder   Assault      Rape   UrbanPop
Murder    18.970465  291.0624  22.99141   4.386204
Assault  291.062367 6945.1657 519.26906 312.275102
Rape      22.991412  519.2691  87.72916  55.768082
UrbanPop   4.386204  312.2751  55.76808 209.518776
```

Obs. É uma matriz simétrica com as variâncias na diagonal principal.

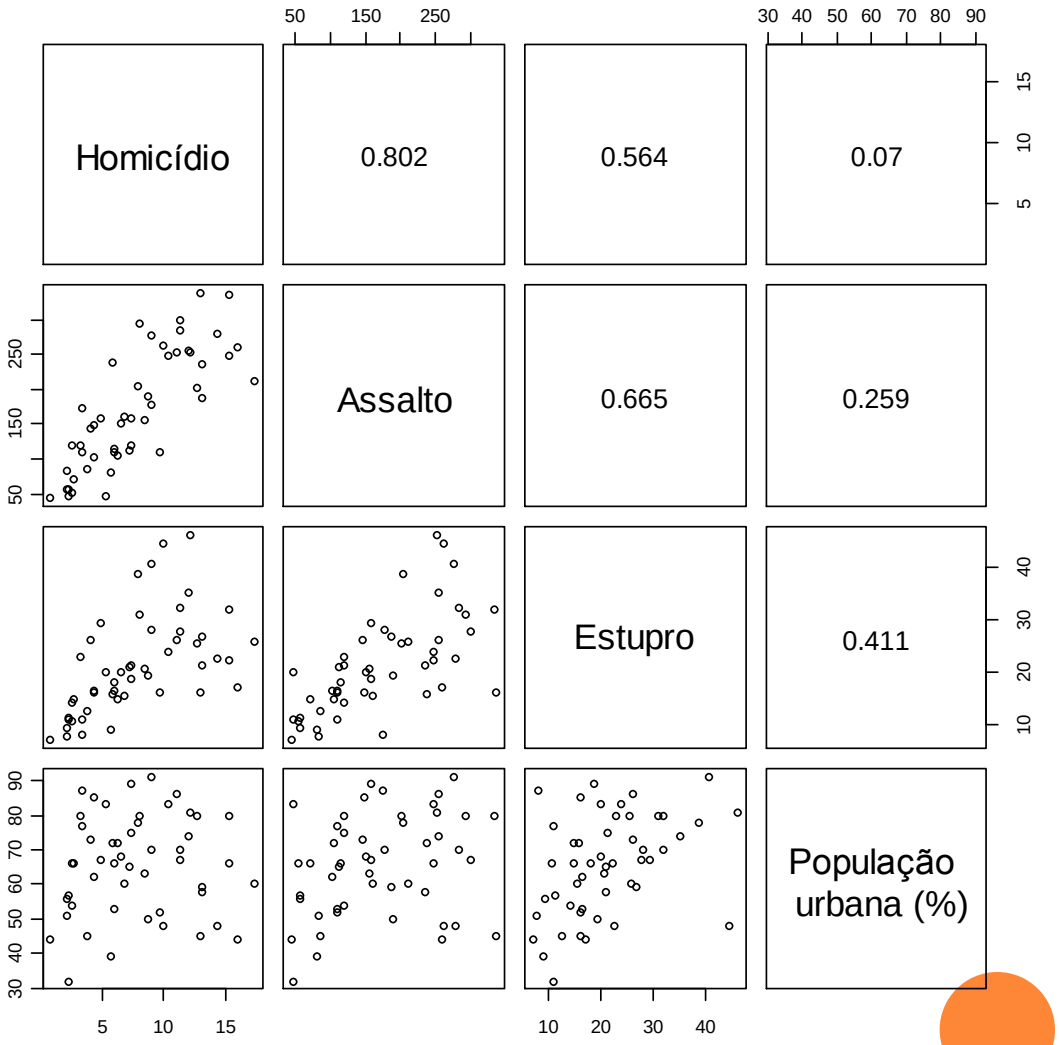
Matriz de correlações:

```
> cor(USArrests[, ordem])
             Murder   Assault      Rape   UrbanPop
Murder   1.00000000 0.8018733 0.5635788 0.06957262
Assault  0.80187331 1.0000000 0.6652412 0.25887170
Rape     0.56357883 0.6652412 1.0000000 0.41134124
UrbanPop 0.06957262 0.2588717 0.4113412 1.00000000
```

Obs. A função `cov2cor` transforma uma matriz de covariâncias em uma matriz de correlações.

Correlação em R

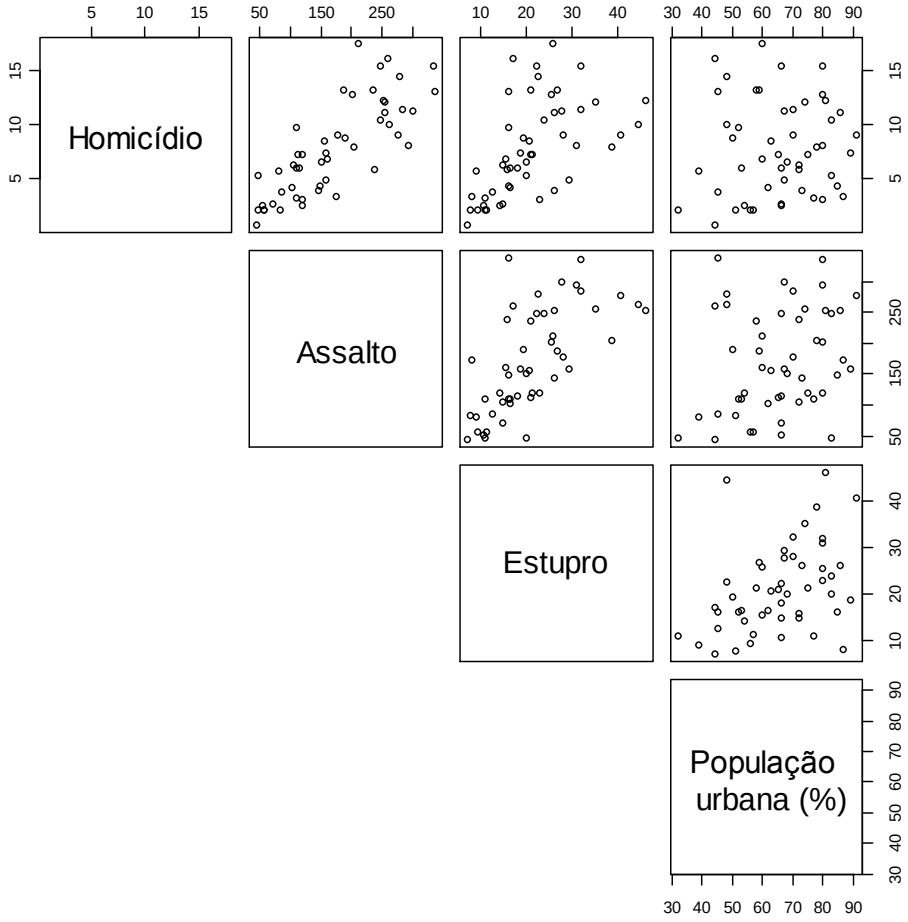
```
> panel.cor = function(x, y, digits = 3)
{
    usr = par("usr")
    on.exit(par(usr))
    par(usr = c(0, 1, 0, 1))
    r = cor(x, y)
    text(0.5, 0.5, round(r, digits), cex = 1.5)
}
> pairs(USArrests[, ordem], labels = nomes, upper.panel = panel.cor)
```



Correlação em R

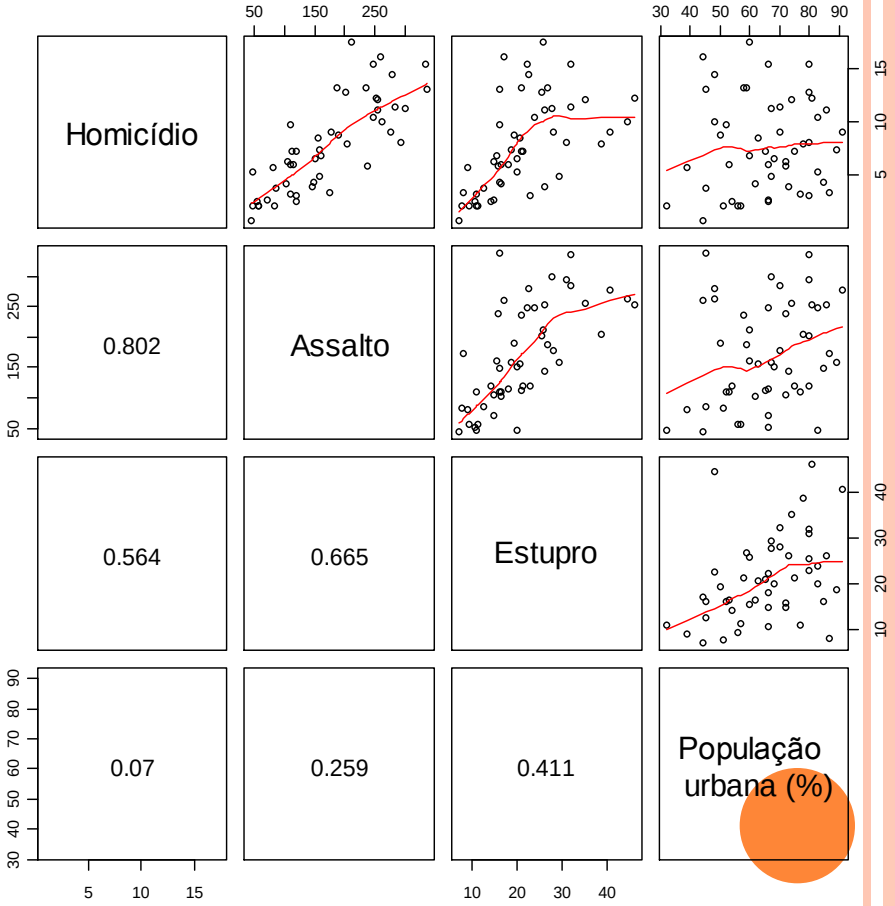
Omitindo a parte inferior da matriz:

```
> pairs(USArrests[, ordem], labels = nomes, lower.panel = NULL)
```



Correlações e linhas de tendência:

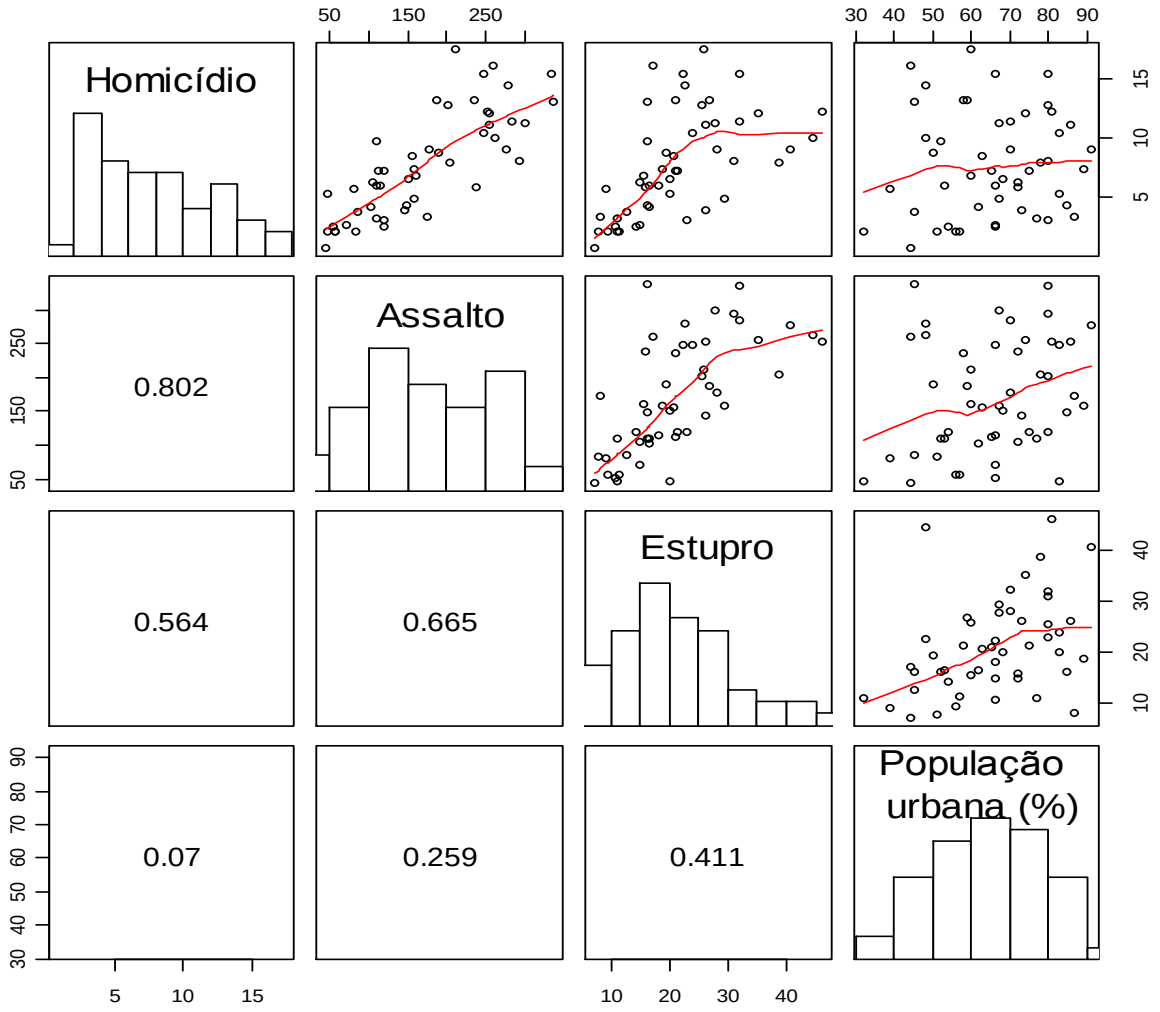
```
> pairs(USArrests[, ordem], labels = nomes, upper.panel = panel.smooth, lower.panel = panel.cor)
```



Correlação em R

Correlações, linhas de tendência e histogramas (utilize `?pairs`):

```
> pairs(USArrests[, ordem], labels = nomes, upper.panel =
panel.smooth, lower.panel = panel.cor, diag.panel = panel.hist)
```



Quais pares apresentam as correlações mais fracas e mais fortes?

O efeito de urbanização está mais associado a qual tipo de crime?

Uma grande quantidade de assaltos resultou em homicídios?

Que outras variáveis poderiam estar relacionadas à ocorrência dos crimes?

Exemplo em Wainer (2009)

Adaptado de Wainer, W. (2009), *Picturing the Uncertain World*, Princenton: Princenton, NJ

Número médio de pessoas por cômodo em 60 países ou regiões.

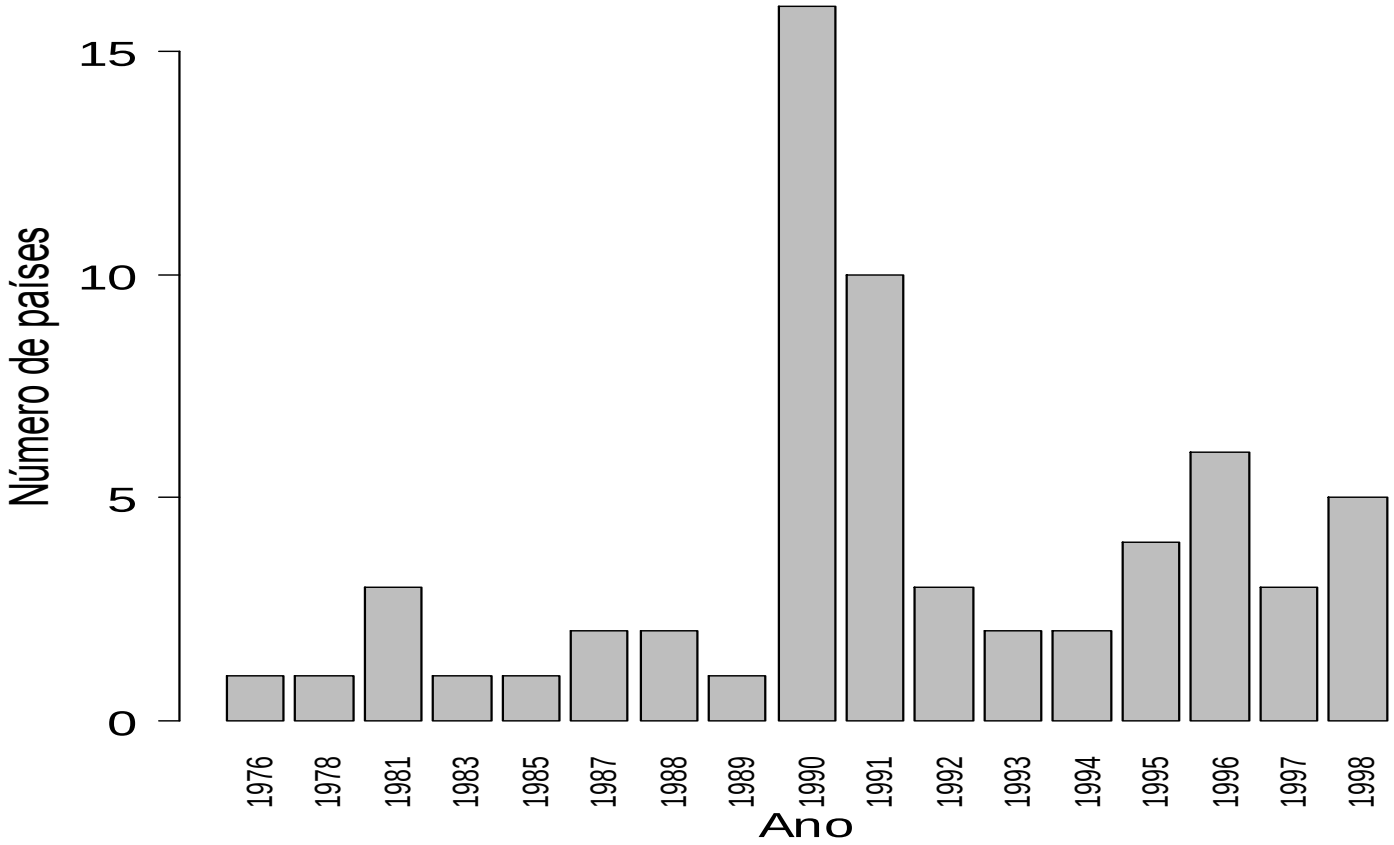
Dados: http://unstats.un.org/unsd/demographic/products/socind/housing.htm

```
> dados = read.csv("Housing_Dec2009.csv", header = TRUE, sep = ";")
> names(dados)
[1] "countryarea" "year"    "total"       "urban"       "rural"
> summary(dados)
      year          total           urban           rural
 Min.   :1976   Min.   :0.500   Min.   :0.500   Min.   : 0.400
 1st Qu.:1990   1st Qu.:0.700   1st Qu.:0.700   1st Qu.: 0.700
 Median :1991   Median :1.000   Median :1.000   Median : 1.000
 Mean   :1991   Mean   :1.141   Mean   :1.153   Mean   : 1.230
 3rd Qu.:1995   3rd Qu.:1.300   3rd Qu.:1.300   3rd Qu.: 1.400
 Max.   :1998   Max.   :3.000   Max.   :3.100   Max.   : 3.300
                NA's   :2.000   NA's   :8.000   NA's   :10.000
```

É possível comparar dados coletados de 1976 com os de 1998?

Exemplo em Wainer (2009)

```
> attach(dados)

> table(year)

> barplot(table(year), xlab = "Ano", ylab = "Número de países",
las = 2)
```



Exemplo em Wainer (2009)

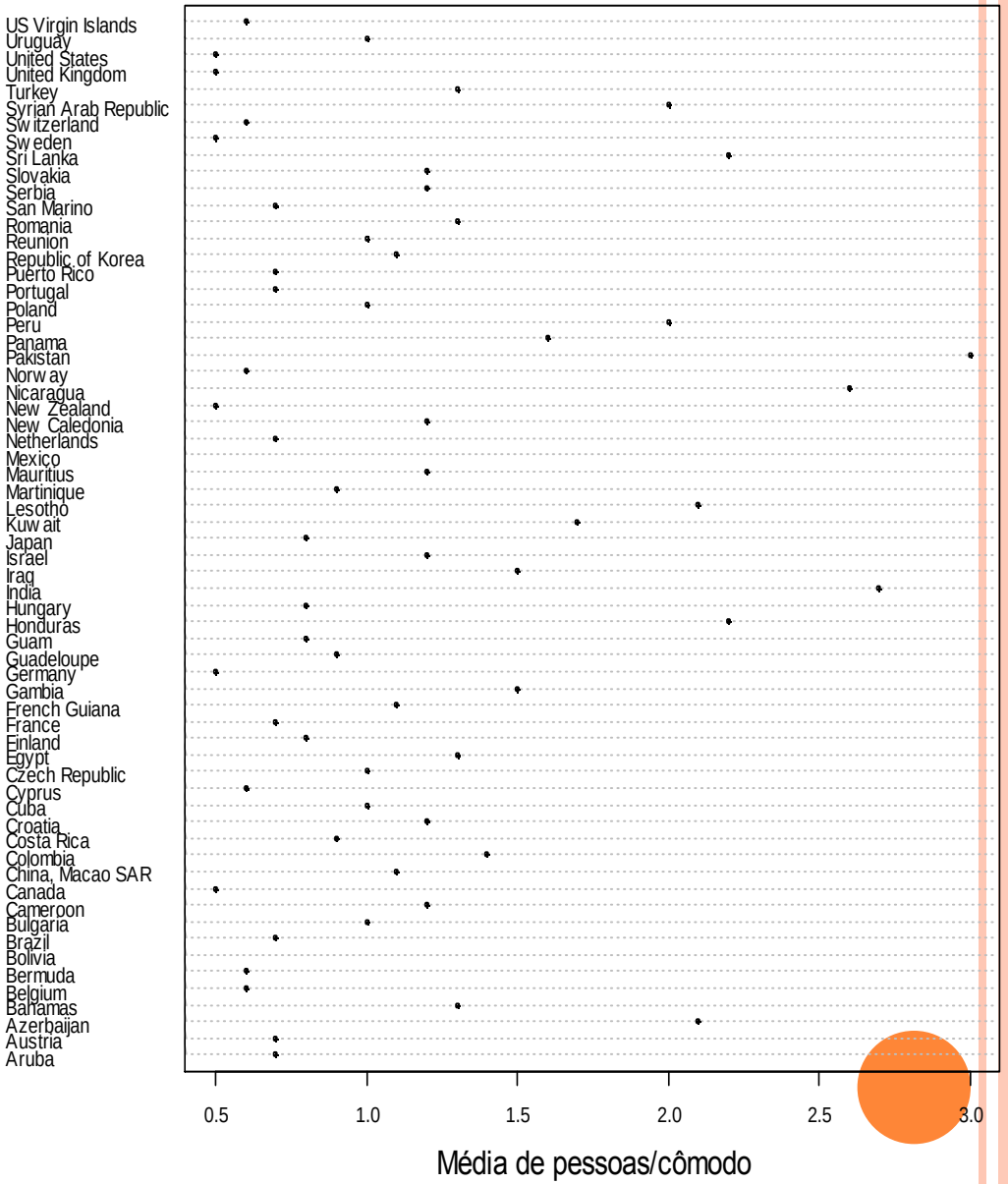
```
> countryarea[year == 1976]

[1] Cameroon
> countryarea[year == 1998]

[1] Azerbaijan  Brazil
Finland   Netherlands
Pakistan
```

```
> dotchart(total, labels =
countryarea, xlab = "Média
de pessoas/cômodo", pch =
20, cex = 0.7, cex.lab =
1.5)
```

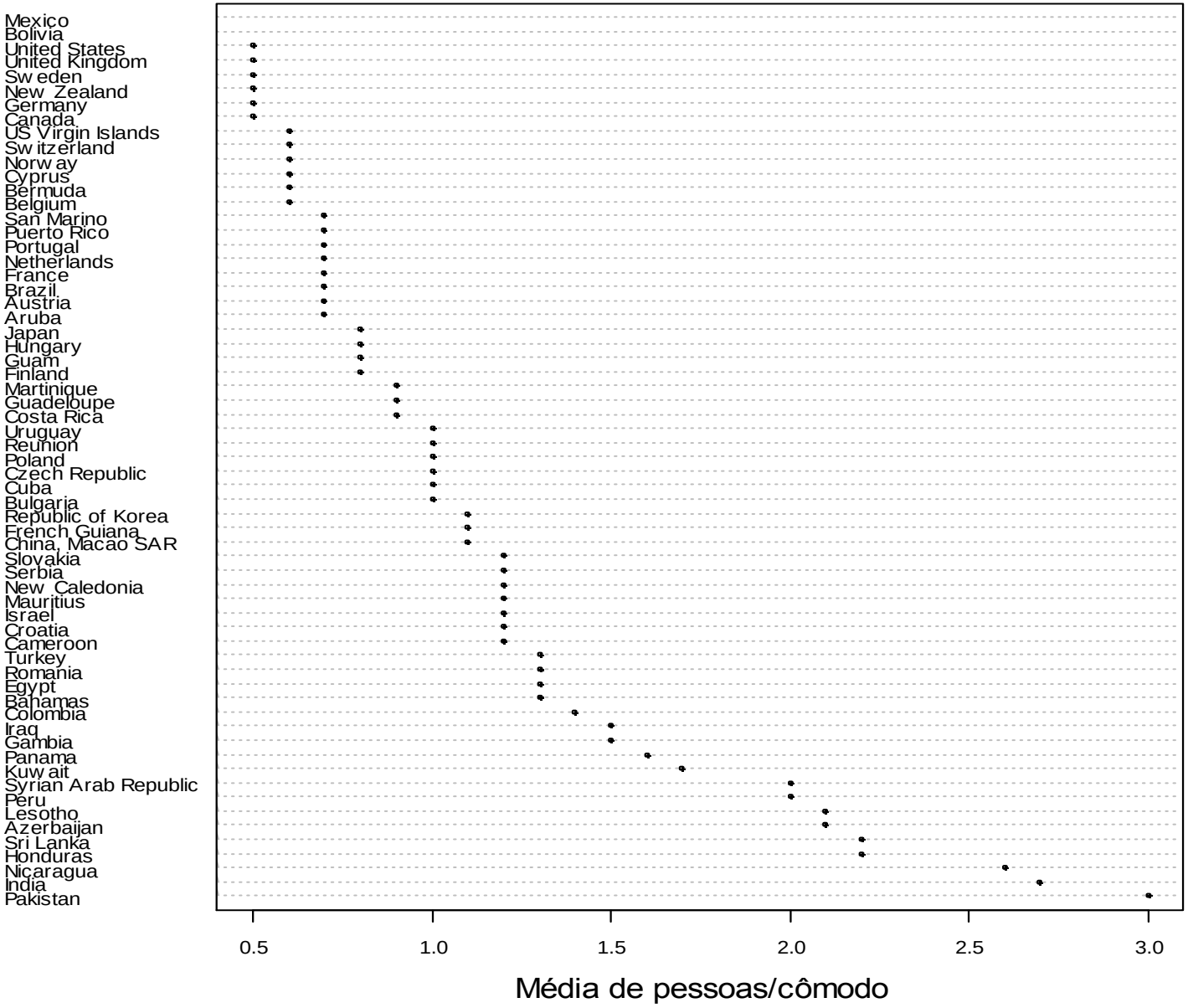
Por que utilizar a ordem alfabética?

```
> ordem = order(total,
decreasing = TRUE)
```

```
> dotchart(total[ordem],
labels =
countryarea[ordem], xlab =
"Média de pessoas/cômodo",
pch = 20, cex = 0.7,
cex.lab = 1.5)
```

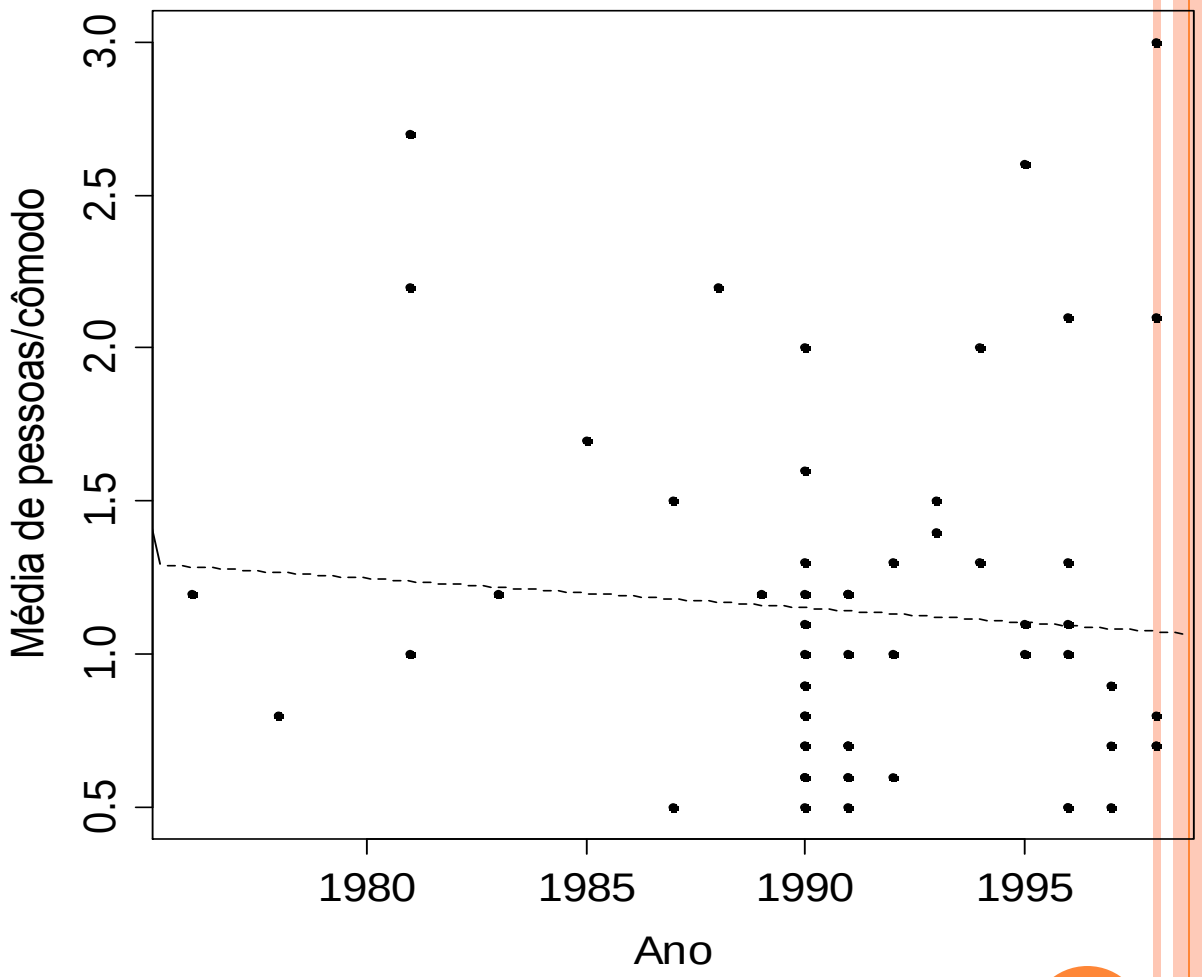


Exemplo em Wainer (2009)



Exemplo em Wainer (2009)

```
> plot(year, total, xlab = "Ano", ylab = "Média de pessoas/cômodo",
pch = 20)

> abline(lm(total ~
year), lty = 2)

> cor(year, total)
[1] NA

> cor(year, total,
use = "complete")
[1] -0.07985232
```



Não há indício de relação entre a densidade de ocupação e o ano em que o dado foi coletado.

Há diferença entre a ocupação nos meios rural e urbano?

Se a resposta for não, podemos trabalhar com a média geral (`total`).

Exemplo em Wainer (2009)

```
> plot(rural, urban, xlab = "Média de pessoas/cômodo - rural",
ylab = "Média de pessoas/cômodo - urbano", pch = 20)
> abline(0, 1, lty = 2)
```

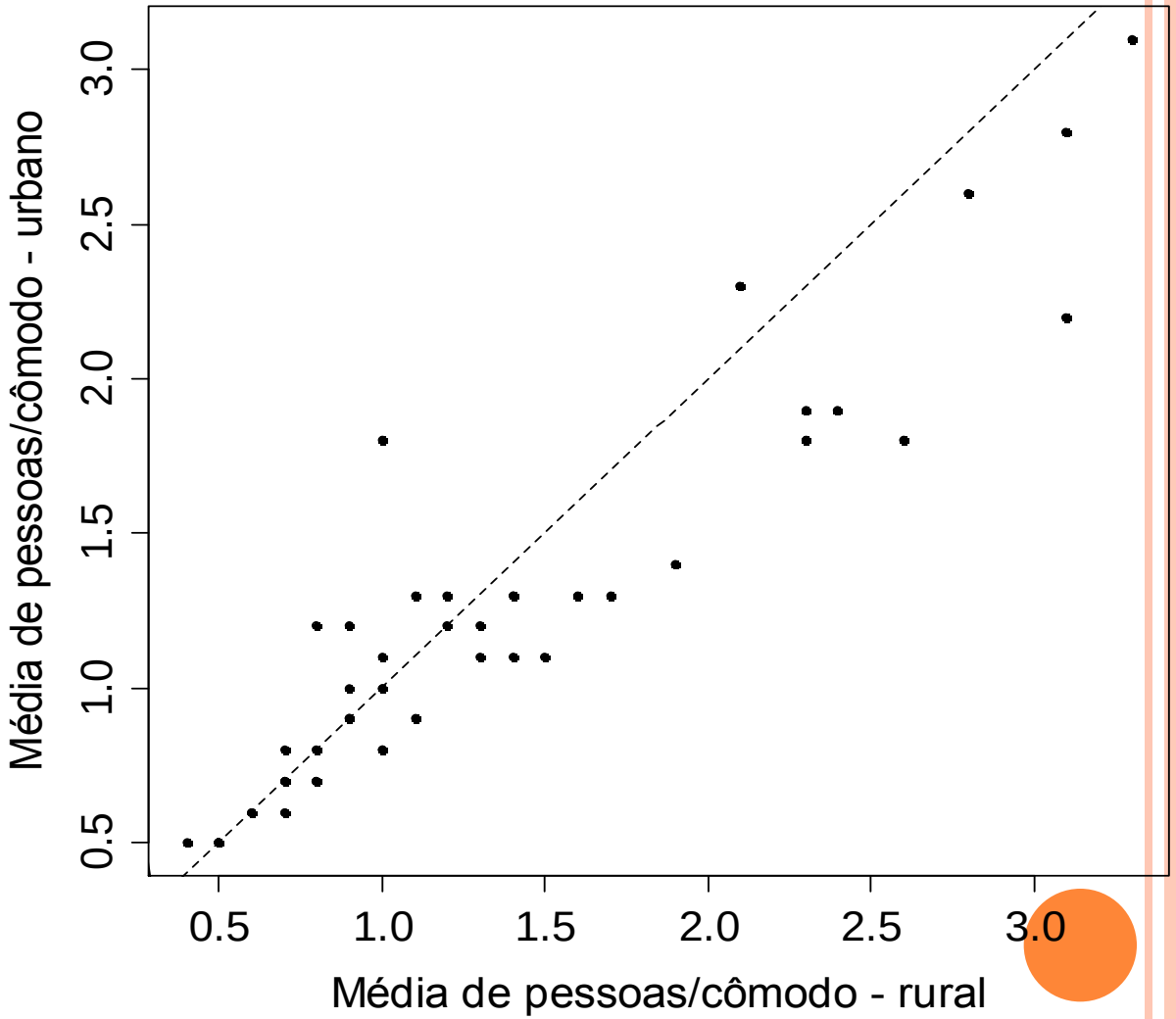
```
> cor(rural, urban,
use = "complete")
[1] 0.9385013
```

Correlação positiva forte.

Tendência de maiores médias no meio rural.

Situação econômica pode estar associada à densidade de ocupação?

Variável: PIB *per capita*.



Exemplo em Wainer (2009)

```
> pib =  read.csv("Income_Dec2009.csv", header = TRUE, sep = ";")
> names(pib)
[1] "countryarea" "year" "GDPcapita"
```

```
> dim(pib)
[1] 215   3
```

```
> summary(pib)
 countryarea        year         GDPcapita
 Afghanistan:  1   Min.   :2008   Min.   :   138
 Albania    :  1   1st Qu.:2008   1st Qu.:  1218
 Algeria    :  1   Median :2008   Median :  4874
 Andorra    :  1   Mean   :2008   Mean   : 15772
 Angola     :  1   3rd Qu.:2008   3rd Qu.: 19291
 Anguilla   :  1   Max.   :2008   Max.   :211501
 (Other)    :209   NA's   :   6   NA's   :     6
```

Dados de 2008 serão utilizados apenas como ilustração.

GDP: *per capita gross domestic product* (em US$).

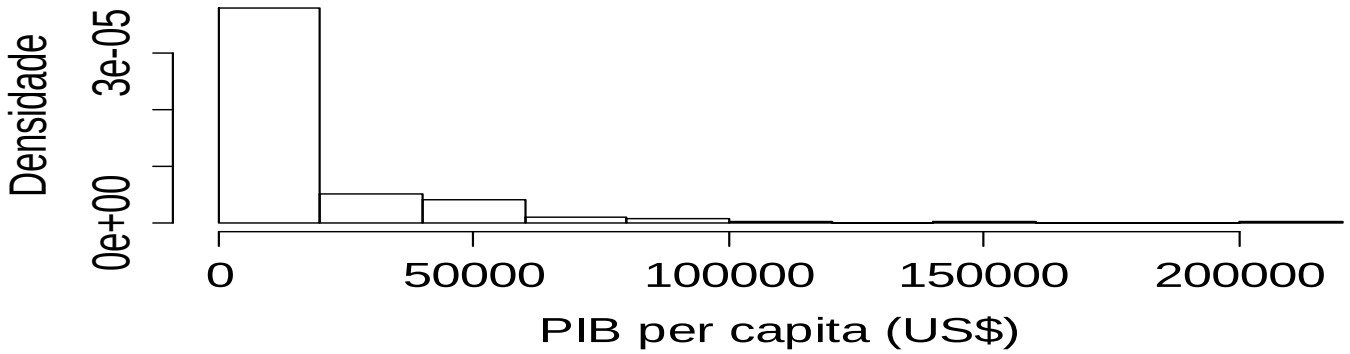
http://unstats.un.org/unsd/snaama/dnllist.asp

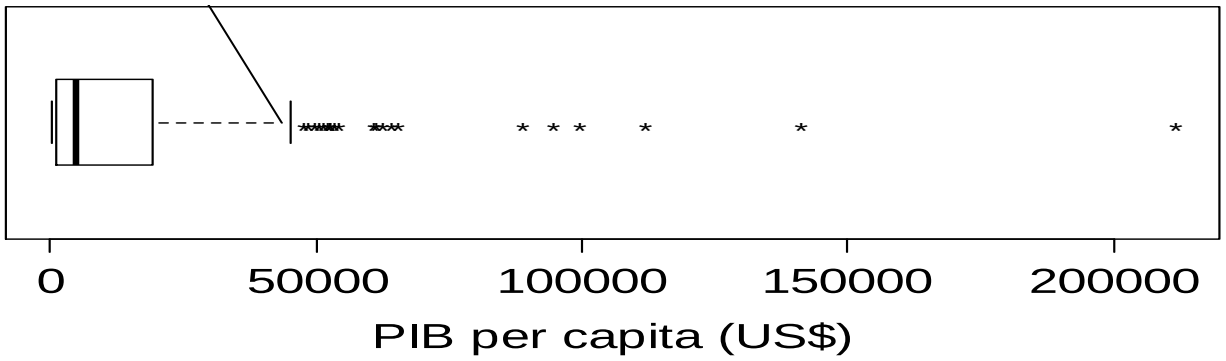
```
> pib$country[which.min(pib$GDPcapita)]
[1] Burundi
> pib$country[which.max(pib$GDPcapita)]
[1] Monaco
```

```
> pib$GDP[pib$country == "Brazil"]
[1] 8311
```

Exemplo em Wainer (2009)

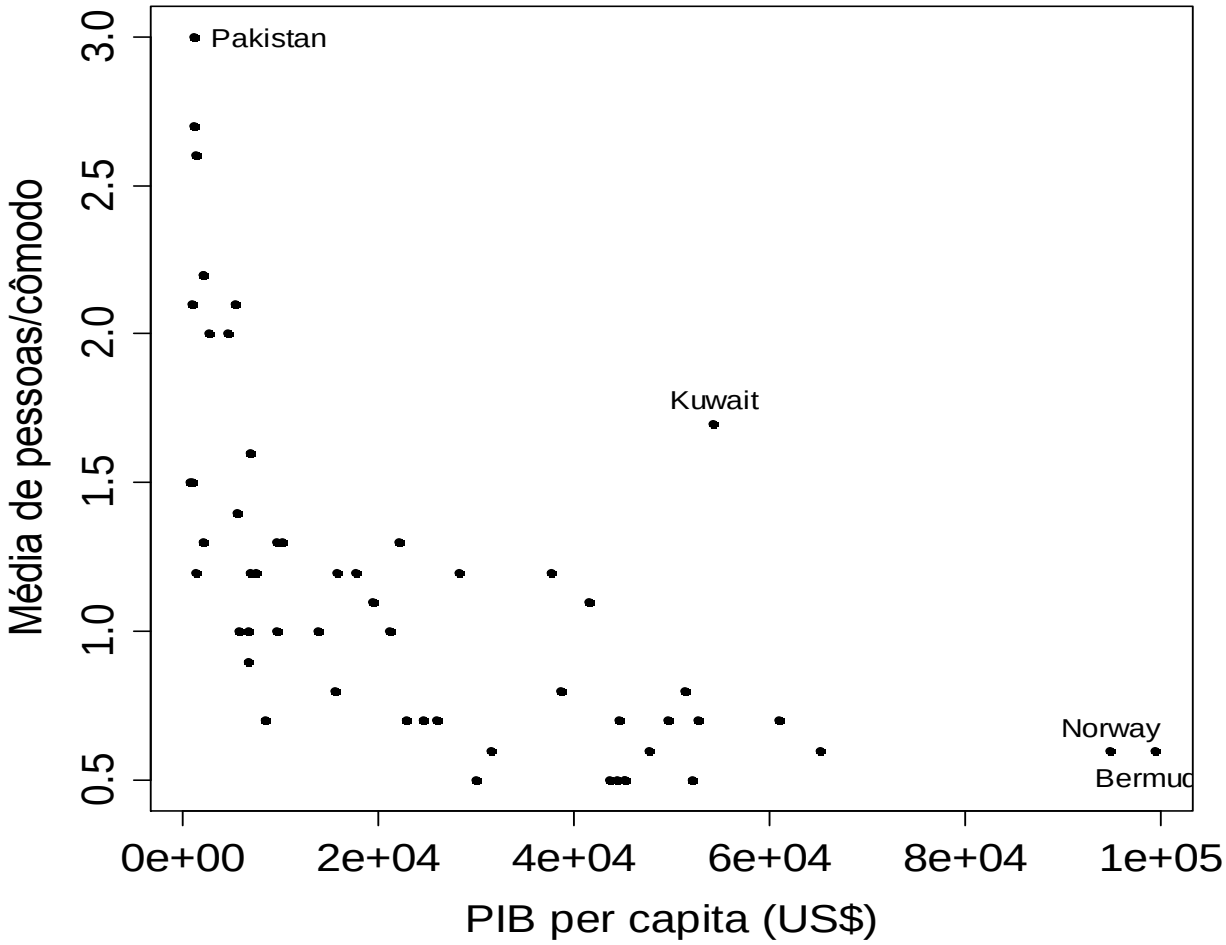
```
> par(mfrow = c(2, 1))
> hist(pib$GDP, freq = FALSE, xlab = "PIB per capita (US$)", ylab =
"Densidade", main = "")
> boxplot(pib$GDP, xlab = "PIB per capita (US$)", pch = "*",
horizontal = TRUE)
```





Exemplo em Wainer (2009)

```
> pib60 = pib$GDP[match(countryarea, pib$country)]
> plot(pib60, total, pch = 20, ylab = "Média de pessoas/cômodo",
   xlab = "PIB per capita (US$)")
> identify(pib60, total, countryarea)
```



Associação negativa.

Assimetria em PIB *per capita*.

Transformações de variáveis

Alguns objetivos: (a) simetrizar os dados e (b) linearizar a relação entre as variáveis.

$$\text{Família de transformações}: t = t(x) = \begin{cases} x^{\lambda}, & \text{se } \lambda \neq 0, \\ \log(x), & \text{se } \lambda = 0, \end{cases} \quad \text{se } x > 0.$$

λ deve ser escolhido de modo a atingir o(s) objetivo(s), pelo menos aproximadamente.

t(x) é monótona em x:

(1) $\lambda \geq 0$. $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)} \Leftrightarrow t(x_{(1)}) \leq t(x_{(2)}) \leq \ldots \leq t(x_{(n)})$.

(2) $\lambda < 0$. $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)} \Leftrightarrow t(x_{(n)}) \leq t(x_{(n-1)}) \leq \ldots \leq t(x_{(1)})$.

Posições são preservadas em (1) e são invertidas em (2).

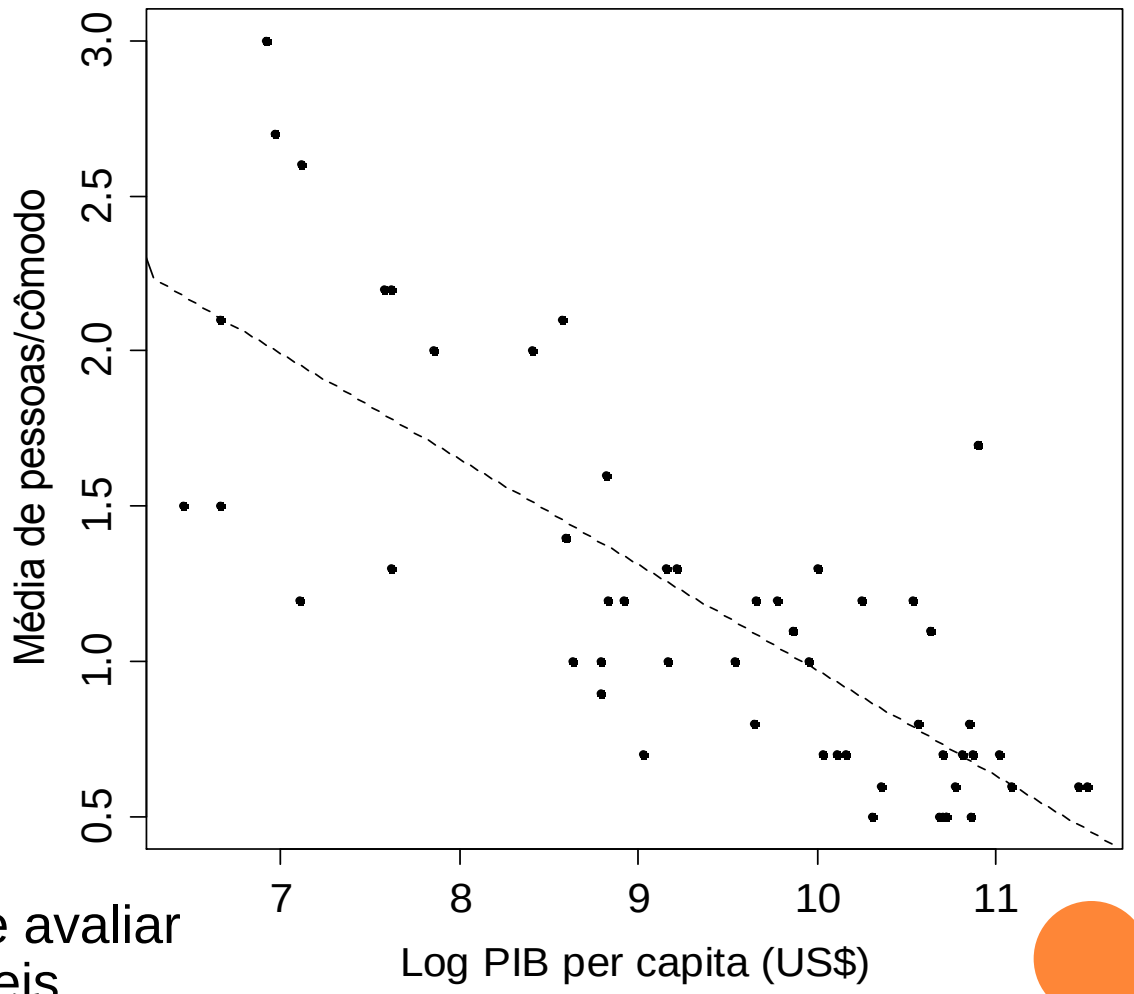
Obs. Se M é a mediana de x, então t(M) é a mediana de t.

Transformações comuns: log(x), $x^{1/2}$, 1/x e $1/x^2$.

Exemplo em Wainer (2009)

Transformação logarítmica da variável PIB *per capita*.

```
> plot(log(pib60), total, pch = 20, ylab = "Média de pessoas/cômodo", xlab = "Log PIB per capita (US$)“)

> abline(lm(total ~ log(pib60)), lty = 2)

> cor(log(pib60), total, use = "complete")

[1] -0.7787283
```



Outras variáveis: fertilidade e desemprego feminino.

Exercício: Baixar dados e avaliar associações entre variáveis
http://unstats.un.org/unsd/demographic/products/socind/
Entregar na próxima aula!

8.2. Variáveis qualitativas

$x \in \{ x_1,...,x_k \}$ e $y \in \{ y_1,...,y_m \}$, $1 < k \leq n$ e $1 < m \leq n$.
f_{ij} : frequencia absoluta do par (x_i, y_j), $i = 1,...,k$ e $j = 1,...,m$.

Tabela de contingências (*contingency table*) ou tabela de dupla entrada: tabela com os diferentes pares (x_i, y_j) e suas frequencias f_{ij}.

x	y					
	y_1	...	y_j	...	y_m	Totais
x_1	f_{11}	...	f_{1j}	...	f_{1m}	$f_{1\bullet}$
⋮	⋮	...	⋮	...	⋮	⋮
x_i	f_{i1}	...	f_{ij}	...	f_{im}	$f_{i\bullet}$
⋮	⋮	...	⋮	...	⋮	⋮
x_k	f_{k1}	...	f_{kj}	...	f_{km}	$f_{k\bullet}$
Totais	$f_{\bullet 1}$	...	$f_{\bullet j}$	...	$f_{\bullet m}$	n

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} f_{ij} = n.$$

$$f_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{m} f_{ij}, \ i = 1,..,k \ \text{ e}$$

$$\sum_{i=1}^{k} f_{i\bullet} = n.$$

$$f_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{k} f_{ij}, \ j = 1,..,m \ \text{ e } \sum_{j=1}^{m} f_{\bullet j} = n.$$

8.2. Variáveis qualitativas

Tabela de contingências: distribuição de frequencias conjunta de x e y.

Distribuição marginal de x (frequencias absolutas)

x	y: y_1	...	y_j	...	y_m	Totais
x_1	f_{11}	...	f_{1j}	...	f_{1m}	$f_{1\bullet}$
...	...	...	...	...	...	...
x_i	f_{i1}	...	f_{ij}	...	f_{im}	$f_{i\bullet}$
...	...	...	...	...	...	...
x_k	f_{k1}	...	f_{kj}	...	f_{km}	$f_{k\bullet}$
Totais	$f_{\bullet 1}$	...	$f_{\bullet j}$	...	$f_{\bullet m}$	n

Distribuição marginal de y (frequencias absolutas)

x	y: y_1	...	y_j	...	y_m	Totais
x_1	f_{11}	...	f_{1j}	...	f_{1m}	$f_{1\bullet}$
...	...	...	...	...	...	...
x_i	f_{i1}	...	f_{ij}	...	f_{im}	$f_{i\bullet}$
...	...	...	...	...	...	...
x_k	f_{k1}	...	f_{kj}	...	f_{km}	$f_{k\bullet}$
Totais	$f_{\bullet 1}$	...	$f_{\bullet j}$	...	$f_{\bullet m}$	n

8.2. Variáveis qualitativas

Frequencias relativas (f^*) são bastante utilizadas em tabelas de contingências.

Três possibilidades de cálculo: (a) em relação ao total geral (nº de observações = n), (b) em relação ao total de cada linha ($f_{i\bullet}$) e (c) em relação ao total de cada coluna ($f_{\bullet j}$).

(a)

x	y					Totais
	y_1	...	y_j	...	y_m	
x_1	f_{11} / n	...	f_{1j} / n	...	f_{1m} / n	$f_{1.} / n$
...	...	...	...	...	...	...
x_i	f_{i1} / n	...	f_{ij} / n	...	f_{im} / n	$f_{i.} / n$
...	...	...	...	...	...	...
x_k	f_{k1} / n	...	f_{kj} / n	...	f_{km} / n	$f_{k.} / n$
Totais	$f_{.1} / n$	...	$f_{.j} / n$	...	$f_{.m} / n$	1

Distribuição marginal de x

Distribuição marginal de y

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \frac{f_{ij}}{n} = 1.$$

8.2. Variáveis qualitativas

(b)

x	y					
	y_1	...	y_j	...	y_m	Totais
x_1	$f_{11} / f_{1\bullet}$	...	$f_{1j} / f_{1\bullet}$	...	$f_{1m} / f_{1\bullet}$	1
...	...	...	...	...	...	...
x_i	$f_{i1} / f_{i\bullet}$	...	$f_{ij} / f_{i\bullet}$	...	$f_{im} / f_{i\bullet}$	1
...	...	...	...	...	...	...
x_k	$f_{k1} / f_{k\bullet}$	...	$f_{kj} / f_{k\bullet}$	...	$f_{km} / f_{k\bullet}$	1

Distribuição condicional de y dado $x = x_i$.

k distribuições condicionais de y.

(c)

x	y				
	y_1	...	y_j	...	y_m
x_1	$f_{11} / f_{\bullet 1}$	...	$f_{1j} / f_{\bullet j}$	...	$f_{1m} / f_{\bullet m}$
...	...	...	...	...	...
x_i	$f_{i1} / f_{\bullet 1}$	...	$f_{ij} / f_{\bullet j}$	...	$f_{im} / f_{\bullet m}$
...	...	...	...	...	...
x_k	$f_{k1} / f_{\bullet 1}$	...	$f_{kj} / f_{\bullet j}$	...	$f_{km} / f_{\bullet m}$
Totais	1	...	1	...	1

Distribuição condicional de x dado $y = y_j$.

m distribuições condicionais de x.

8.2. Variáveis qualitativas

Que frequencia relativa utilizar?

(a) Relação causal bilateral ($x \leftrightarrow y$): em relação ao total geral (n).

(b) Relação causal unilateral ($x \rightarrow y$): em relação ao total de cada linha ($f_{i\bullet}$).

(c) Relação causal unilateral ($y \rightarrow x$): em relação ao total de cada coluna ($f_{\bullet j}$).

Obs. 1. Em (b) temos k distribuições condicionais de y. Quanto mais semelhantes forem estas distribuições, mais fraca é a associação entre x e y.

Obs. 2. Em (c) é usual mudar intercambiar os nomes, de modo que x ocupe as linhas e y ocupe as colunas da tabela de contingências.

Exemplo

Intenção de voto (%) para presidente de acordo com o domicílo eleitoral, 20 e 21/5/2010.

Região	Candidato(a)					Total
	Serra	Dilma	Marina	Em branco, nulo ou nenhum	Não sabe	
SE	40	33	12	7	8	100
S	38	35	12	4	10	99
NE	33	44	8	1	11	97
N e CO	34	40	14	5	7	100

Fonte. DataFolha (http://datafolha.folha.uol.com.br/po/ver_po.php?session=971).

Sugestão. Quanto um total é diferente de 100%, a compensação é efetuada nas frequencias de maiores valores.

A região do domicílio eleitoral (x) influencia a intenção de voto (y) ?

Como quantificar?

Independência

x e y são independentes se, e somente se,

$$f_{ij} = \frac{f_{i\bullet} f_{\bullet j}}{n},\ i = 1,\ldots,k \text{ e } j = 1,\ldots,m.$$

De forma equivalente, $\frac{f_{ij}}{n} = \frac{f_{i\bullet}}{n}\frac{f_{\bullet j}}{n},\ i = 1,\ldots,k \text{ e } j = 1,\ldots,m.$

x	y					
	y_1	...	y_j	...	y_m	Totais
x_1	f_{11}/n	...	f_{1j}/n	...	f_{1m}/n	$f_{1\bullet}/n$
...	...	...	Conjunta	...	...	...
x_i	f_{i1}/n	...	f_{ij}/n	...	f_{im}/n	$f_{i\bullet}/n$ Marginal de x
...	...	...	...	...	...	...
x_k	f_{k1}/n	...	f_{kj}/n	...	f_{km}/n	$f_{k\bullet}/n$
Totais	$f_{\bullet 1}/n$	...	$f_{\bullet j}/n$	...	$f_{\bullet m}/n$	1

Marginal de y

Justificativa. Adaptação do conceito de independência entre as v.a. discretas X e Y: P(X = a, Y = b) = P(X = a) P(Y = b).

Coeficientes de associação

Uma das várias medidas de associação entre variáveis qualitativas.

Baseado nas diferenças entre as frequencias absolutas observadas (f_{ij}) e as frequencias calculadas supondo independência entre x e y ($f_{ij}^{ind} = f_{i\bullet} f_{\bullet j} / n$):

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} \frac{(f_{ij} - f_{ij}^{\text{ind}})^2}{f_{ij}^{\text{ind}}} : \text{ qui-quadrado de Pearson.}$$

$\chi^2 = 0$ => ausência de associação entre x e y.
$\chi^2 > 0$: comparar com quantil de uma v.a. com distribuição $\chi^2_{(k-1)(m-1),\alpha}$

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}} : \text{ coeficiente de contingência.}$$

O valor máximo de *C* depende de k e m.

$$T = \sqrt{\frac{\chi^2}{n\sqrt{(k-1)(m-1)}}} : \text{ coeficiente de Tschuprow.}$$

Obs. $0 \leq T \leq 1$.

Coeficientes de associação

Exemplo. Tabela k × k (m = k).

x	y					
	y_1	...	y_i	...	y_k	Totais
x_1	f_{11}	...	–	...	–	f_{11}
...	...	...	...	...	...	...
x_i	–	...	f_{ii}	...	–	f_{ii}
...	...	...	...	...	...	...
x_k	–	...	–	...	f_{kk}	f_{kk}
Totais	f_{11}	...	f_{ii}	...	f_{kk}	n

Exercício. Provar que, neste caso, $\chi^2 = n\,(k - 1)$. Logo, T = 1.

Apresente outros exemplos nos quais T = 1.

Funções em R

```
> library(ineq)
> ?Ilocos
```

Ilocos {ineq} R Documentation

Income Metadata from Ilocos, Philippines

Description

Income metadata from surveys conducted by the Philippines' National Statistics Office.

Usage

data(Ilocos)

Dados coletados em domicílios nas Filipinas.

```
> data(Ilocos)
> dados = Ilocos
> dim(dados)  [1] 632   8
> names(dados)
"income" "sex" "family.size" "urbanity" "province" "AP.income"
"AP.family.size" "AP.weight"
```

n = 632 observações de 8 variáveis.

```
> summary(dados[, c("sex", "urbanity", "province")])
 sex           urbanity          province
 female:114    rural:301    Ilocos Norte: 65
 male  :518    urban:331    Ilocos Sur  : 68
                            La Union    :116
                            Pangasinan  :383
```

```
> class(dados$province)
[1] "factor"
```

Variável qualitativa: fator (*factor*).

Funções em R

```
> attach(dados)
> levels(urbanity) = c("Rural", "Urbana")
> (tab1 = table(province, urbanity))
```

Um fator tem níveis (*levels*).

province	Rural	Urbana
Ilocos Norte	47	18
Ilocos Sur	45	23
La Union	71	45
Pangasinan	138	245

x: province

y: urbanity

Tabela 4 × 2 com f_{ij}, i = 1,...,4 (k = 4) e j = 1,2 (m = 2).

```
> addmargins(tab1, 1)
```

province	Rural	Urbana
Ilocos Norte	47	18
Ilocos Sur	45	23
La Union	71	45
Pangasinan	138	245
Sum	301	331

```
> addmargins(tab1, 2)
```

province	Rural	Urbana	Sum
Ilocos Norte	47	18	65
Ilocos Sur	45	23	68
La Union	71	45	116
Pangasinan	138	245	383

```
> addmargins(tab1, 1:2)
```

province	Rural	Urbana	Sum
Ilocos Norte	47	18	65
Ilocos Sur	45	23	68
La Union	71	45	116
Pangasinan	138	245	383
Sum	301	331	632

Para estudar a relação province → urbanity, qual das três tabelas é mais útil?

Funções em R

```
> margin.table(tab1, margin = 1)
province
Ilocos Norte    Ilocos Sur     La Union    Pangasinan
          65            68          116           383
```

```
> margin.table(tab1, margin = 2)
urbanity
Rural Urbana
  301    331
```

```
> prop.table(tab1)
```

province	urbanity Rural	Urbana
Ilocos Norte	0.07436709	0.02848101
Ilocos Sur	0.07120253	0.03639241
La Union	0.11234177	0.07120253
Pangasinan	0.21835443	0.38765823

Frequencias relativas em relação ao total geral (soma = 1).

```
> (tab1rel = prop.table(tab1, margin = 1))
```

province	urbanity Rural	Urbana
Ilocos Norte	0.7230769	0.2769231
Ilocos Sur	0.6617647	0.3382353
La Union	0.6120690	0.3879310
Pangasinan	0.3603133	0.6396867

Distribuição condicional de urbanity | province.

Funções em R

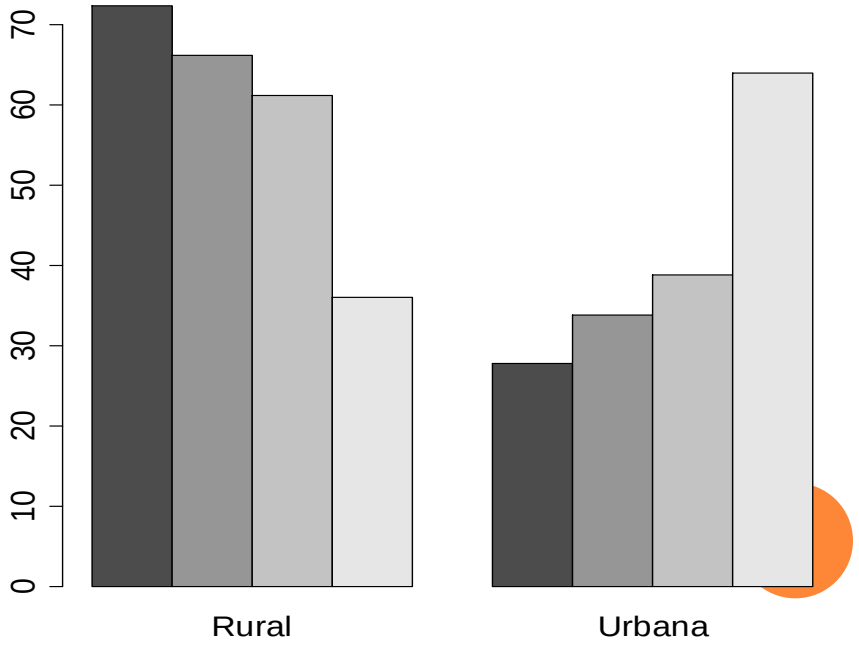
```
> addmargins(tab1rel, 2)
```

	urbanity		
province	Rural	Urbana	Sum
Ilocos Norte	0.7230769	0.2769231	1.0000000
Ilocos Sur	0.6617647	0.3382353	1.0000000
La Union	0.6120690	0.3879310	1.0000000
Pangasinan	0.3603133	0.6396867	1.0000000

```
> print(addmargins(tab1rel, 2)
* 100, digits = 3)
```

	urbanity		
province	Rural	Urbana	Sum
Ilocos Norte	72.3	27.7	100.0
Ilocos Sur	66.2	33.8	100.0
La Union	61.2	38.8	100.0
Pangasinan	36.0	64.0	100.0

```
> tab1relp = tab1rel * 100
> barplot(tab1relp, beside = TRUE)
```

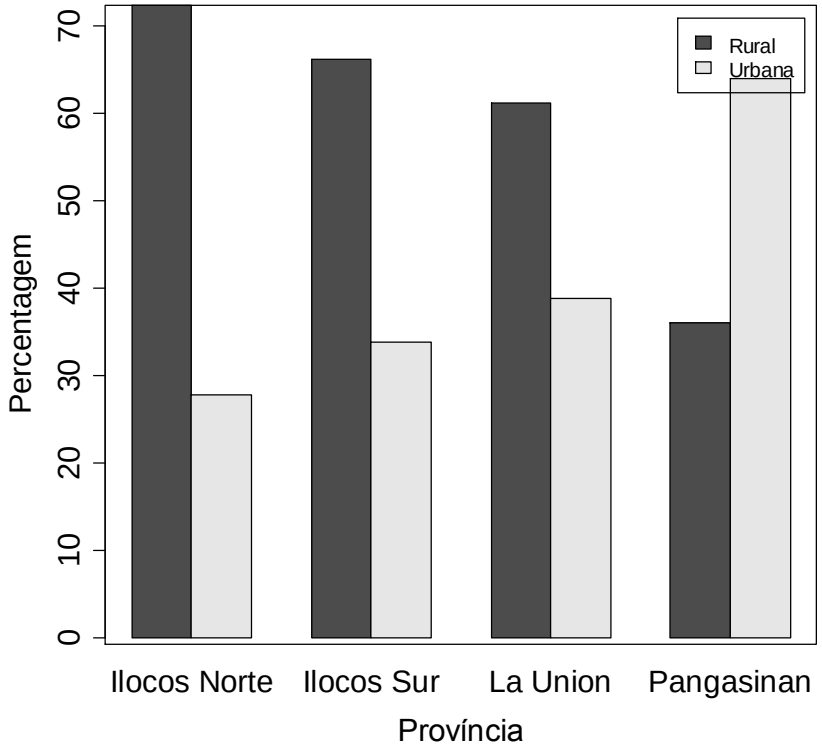


Era o gráfico que esperávamos?

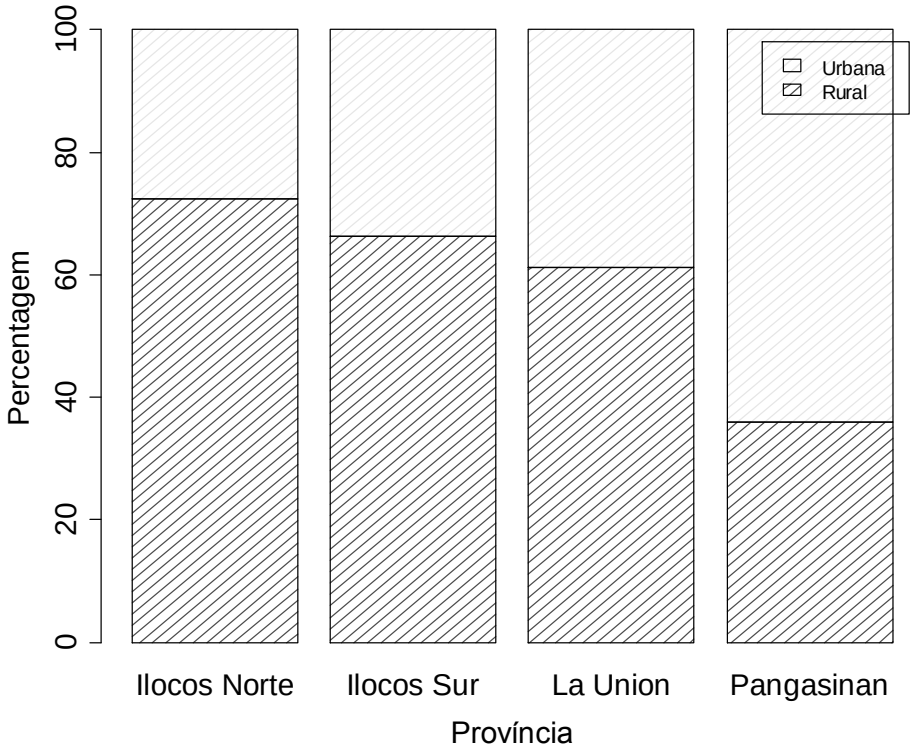
Funções em R

```
> barplot(t(tab1relp), beside = TRUE, xlab = "Província", ylab = "Percentagem", legend.text = TRUE)
```

```
> box()
```




```
> barplot(t(tab1relp), xlab = "Província", ylab = "Percentagem", density = 15, legend.text = TRUE)
```



Exercício. Verificar a utilização de cores e a posição da legenda.

Funções em R

Gráfico de mosaico (*mosaic plot*). Representação de uma tabela de contingências usando retângulos com áreas proporcionais às frequencias.

```
> levels(sex) = c("Feminino", "Masculino")
> tab2 = table(province, sex)
> tab2rel = prop.table(tab2, margin = 1)
> print(addmargins(tab2rel, 2) * 100, digits = 3)
```

province	sex Feminino	Masculino	Sum
Ilocos Norte	12.3	87.7	100.0
Ilocos Sur	26.5	73.5	100.0
La Union	15.5	84.5	100.0
Pangasinan	18.3	81.7	100.0

tab2

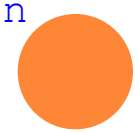
province	sex Feminino	Masculino
Ilocos Norte	8	57
Ilocos Sur	18	50
La Union	18	98
Pangasinan	70	313

Supondo independência entre `province` e `sex`:

```
> tab2marg = addmargins(tab2, 1:2)
> k = nrow(tab2marg) - 1
> m = ncol(tab2marg) - 1
> n = sum(tab2)
> tab2ind = tab2marg[1:k, m + 1] %*% t(tab2marg[k + 1, 1:m]) / n
> rownames(tab2ind) = rownames(tab2)
> colnames(tab2ind) = colnames(tab2)
```

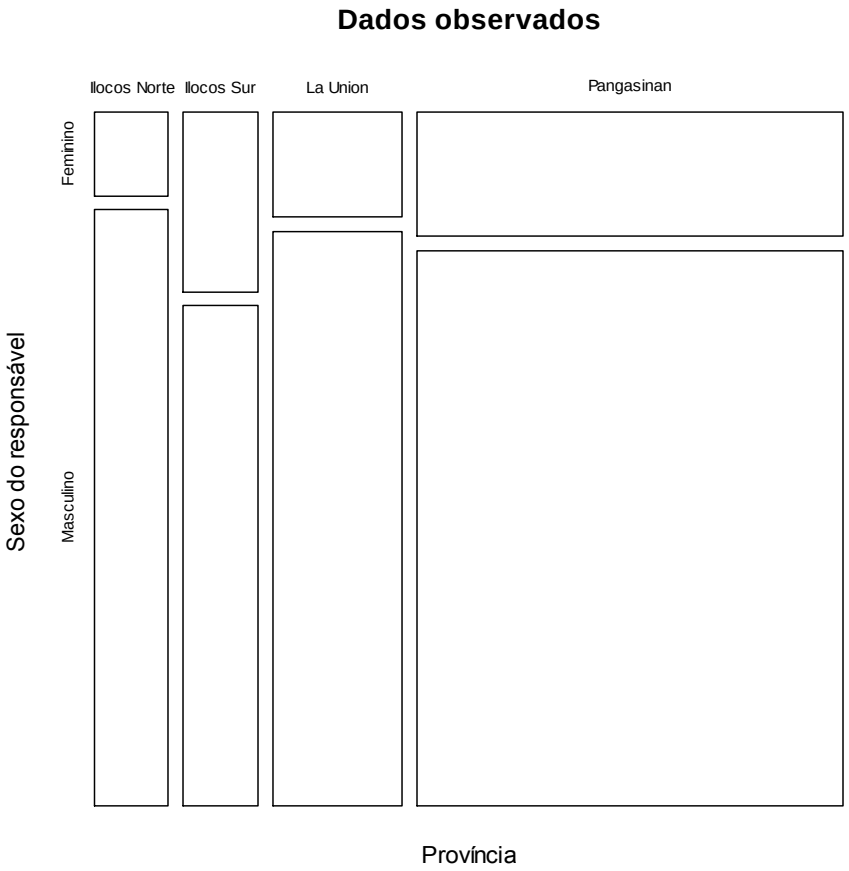
tab2ind

	Feminino	Masculino
Ilocos Norte	11.7	53.3
Ilocos Sur	12.3	55.7
La Union	20.9	95.1
Pangasinan	69.1	313.9



Funções em R

```
> mosaicplot(tab2, ylab = "Sexo do responsável", xlab = "Província", col = "white", main = "Dados observados")
```




```
> mosaicplot(tab2ind, ylab = "Sexo do responsável", xlab = "Província", col = "white", main = "Independência")
```

Retângulos com bases proporcionais às frequencias da variável `province` e alturas proporcionais às frequencias da variável `sex`.

Funções em R

Obs. Substitua `mosaicplot` por `plot` na lâmina anterior. O resultado é diferente? Como explicar?

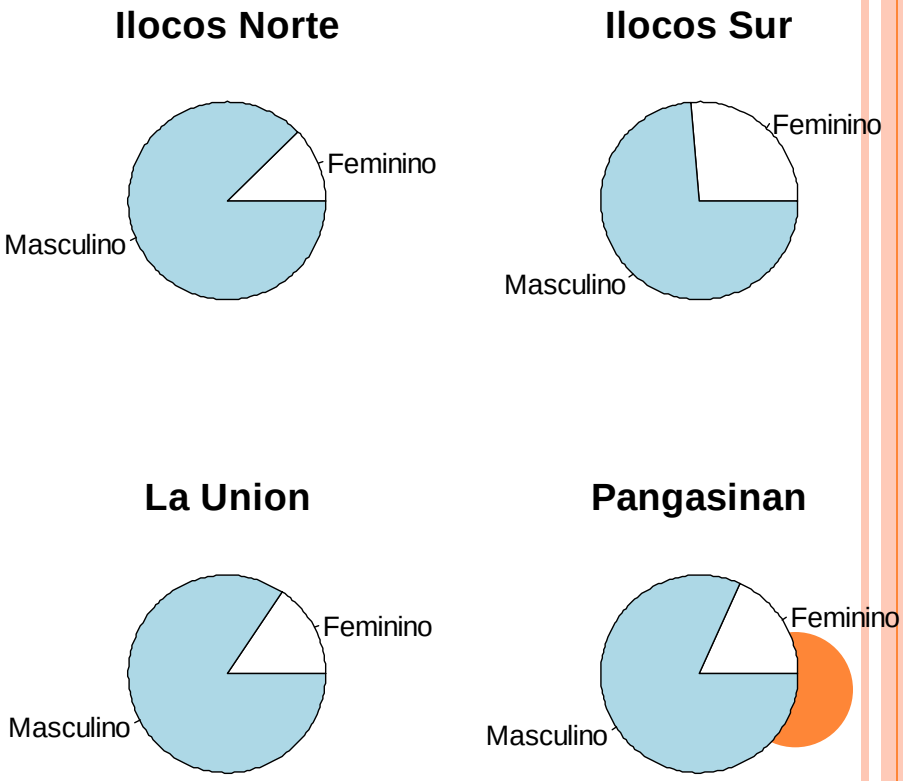
```
> X2 = sum((tab2 - tab2ind)^2 / tab2ind)
> (Tprow = sqrt(X2 / (n * sqrt((k - 1) * (m - 1)))))
[1] 0.06910562
```

Coeficiente de Tschuprow

Obs. O valor de χ^2 e a tabela supondo independência (`tab2ind`) podem ser obtidos usando a função `chisq.test`.

Um gráfico não muito recomendado:

```
> nlinhas = ceiling(k / 2)
> par(mfrow = c(nlinhas, 2))
> for (i in 1:k) pie(tab2[i,],
main = rownames(tab2rel)[i])
```



Parece mais difícil comparar áreas de setores do que alturas de retângulos (em um gráfico de barras).

8.3. Variáveis qualitativas e quantitativas

$x \in \{ x_1,...,x_k \}$, $1 < k \leq n$, é uma variável qualitativa e y é uma variável quantitativa.

Dados observados: n pares de valores (x_j, y_j), sendo que $x_j \in \{ x_1,...,x_k \}$, j = 1,...,n.

É muito comum o interesse na relação causal unilateral $x \rightarrow y$.

Apresentação dos dados: medidas resumo e gráficos de y para cada nível de x.

Cada nível x_i ocorre f_i vezes (frequencia). Para cada nível x_i calculamos a variância s_i^2 dos valores y_j para os quais $x_j = x_i$, j = 1,...,n e i = 1,...,k.

Média ponderada das variâncias:

$$\overline{s^2} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i s_i^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i s_i^2}{n}.$$

Variância de y:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (y_j - \bar{y})^2.$$

Obs. Podemos ter $s_i^2 = 0$, mas $s^2 > 0$.

Ganho na variância: $s^2 - \overline{s^2}$. Ganho relativo na variância: $R^2 = \frac{s^2 - \overline{s^2}}{s^2}$, $0 \leq R^2 \leq 1$.

Quanto maior R^2, mais forte a associação entre x e y.

Quanto maior R^2, maior o poder de explicação de x para y (em termos de variabilidade).

Funções em R

Dados `Ilocos` na lâmina 40.

```
> names(dados)
```

y x y x x

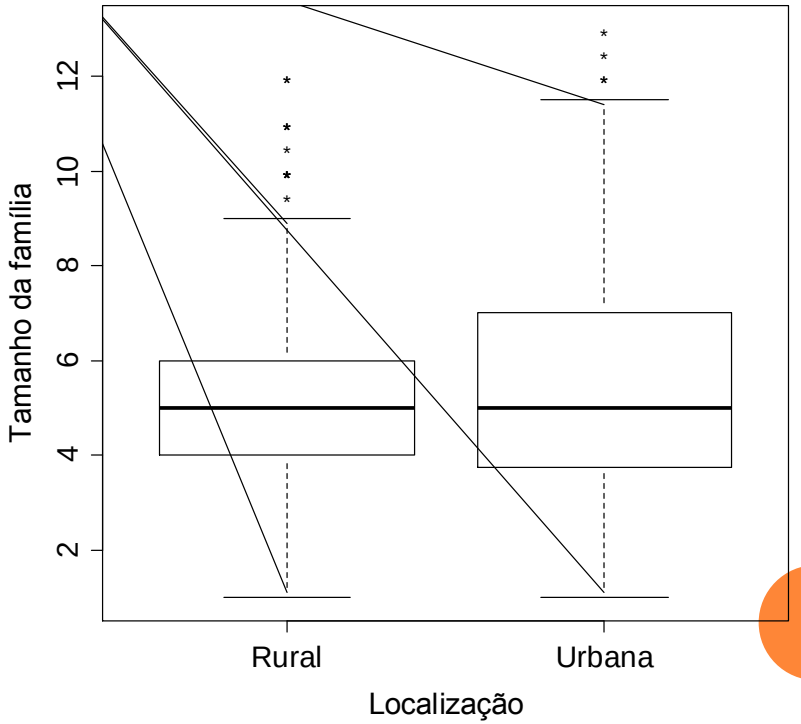
```
"income" "sex" "family.size" "urbanity" "province" "AP.income"
"AP.family.size" "AP.weight"
```

Fórmula: `y ~ x` (y como função de x ou y depende de x).

```
> summary(dados[, c("income", "family.size")])
```

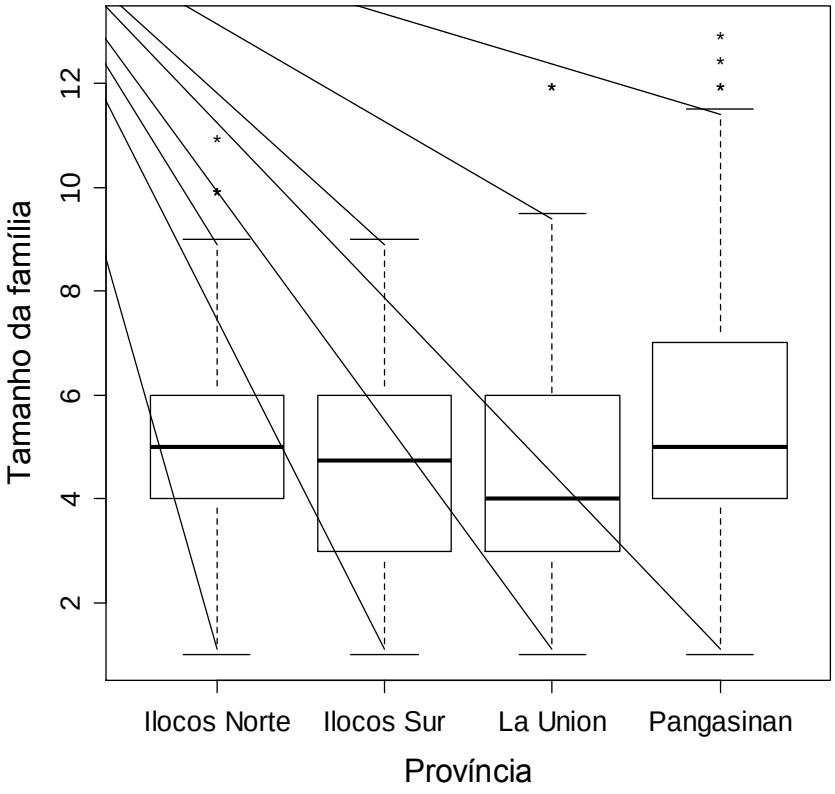
```
     income         family.size
 Min.   :  6067   Min.   : 1.000
 1st Qu.: 48001   1st Qu.: 3.875
 Median : 75926   Median : 5.000
 Mean   :112292   Mean   : 5.193
 3rd Qu.:137068   3rd Qu.: 6.500
 Max.   :835742   Max.   :13.000
```

```
> plot(family.size ~ urbanity,
xlab = "Localização", ylab =
"Tamanho da família", pch =
"*")
```

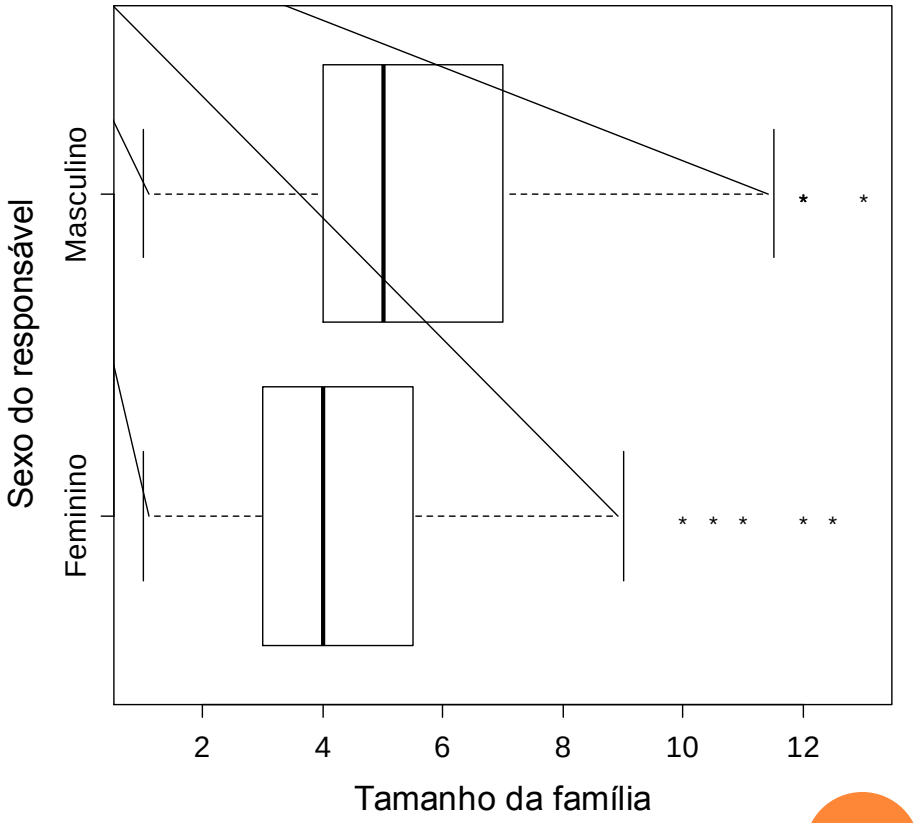


Funções em R

```
> plot(family.size ~ province,
xlab = "Província", ylab =
"Tamanho da família", pch =
"*")
```




```
> plot(family.size ~ sex,
xlab = "Sexo do responsável",
ylab = "Tamanho da família",
pch = "*", horizontal = TRUE)
```

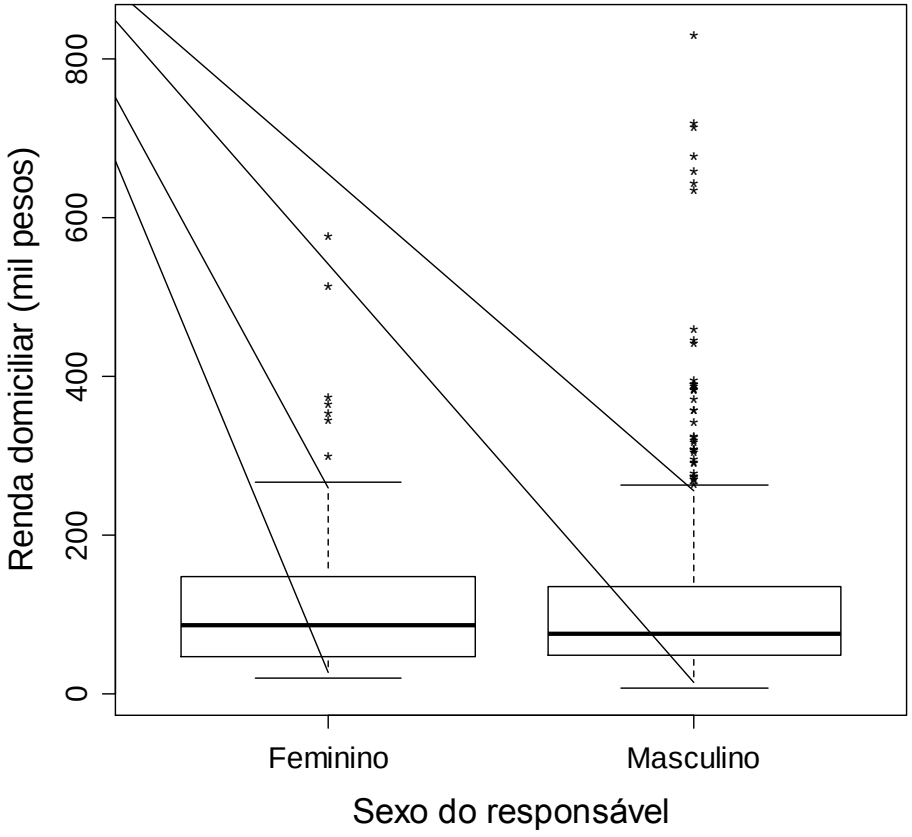


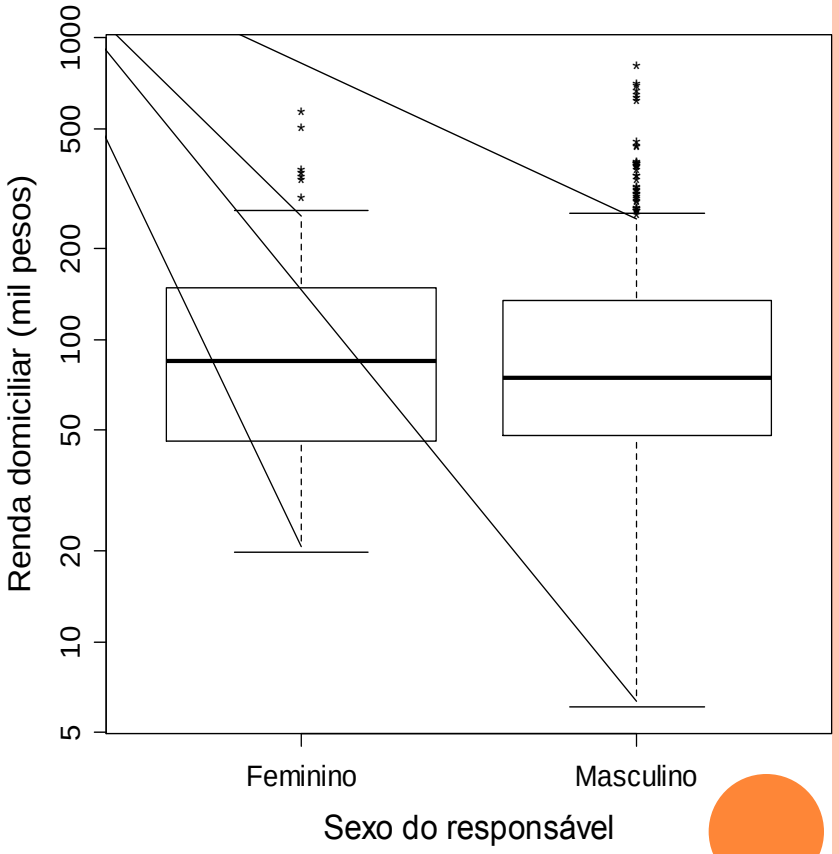
Exercício. Apresente o gráfico à esquerda com níveis em ordem decrescente da mediana.

Funções em R

```
> plot(income / 1000 ~ sex,
xlab = "Sexo do responsável",
ylab = "Renda domiciliar (mil
pesos)",  pch = "*")
```

```
> plot(income / 1000 ~ sex,
xlab = "Sexo do responsável",
log = "y", ylab = "Renda
domiciliar (mil pesos)", pch =
"*")
```

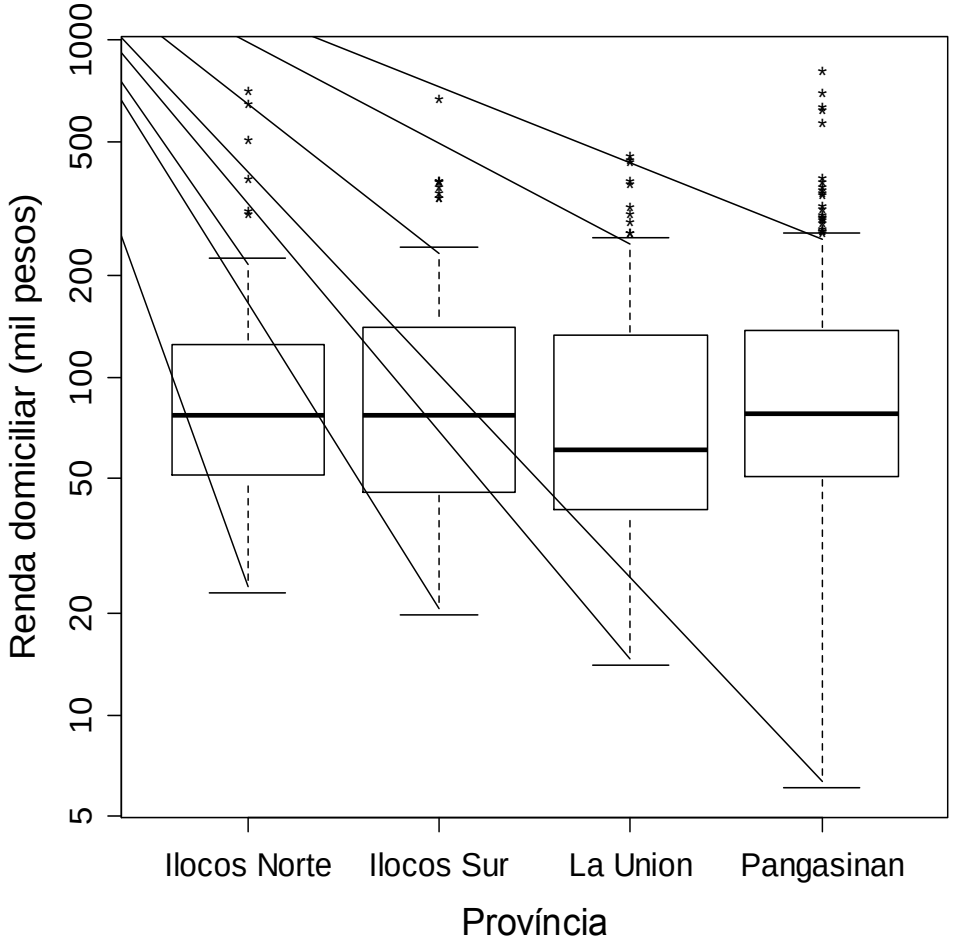




Distribuição da renda é assimétrica. Exercício. Apresente medidas de assimetria.

Funções em R

```
> plot(income / 1000 ~ province,
xlab = "Província", log = "y",
ylab = "Renda domiciliar (mil
pesos)", pch = "*")
```



Médias e variâncias do tamanho da família por província:

```
> (tabmed = tapply(family.size,
province, "mean"))

Ilocos Norte   Ilocos Sur
5.084615     4.683824

La Union   Pangasinan
4.607759     5.479112
```

```
> (tabvar = tapply(family.size,
province, "var"))

Ilocos Norte   Ilocos Sur
4.504447     3.618690

La Union   Pangasinan
4.186113     5.376526
```

```
> (s2 = var(family.size))

[1] 5.000712
```

Funções em R

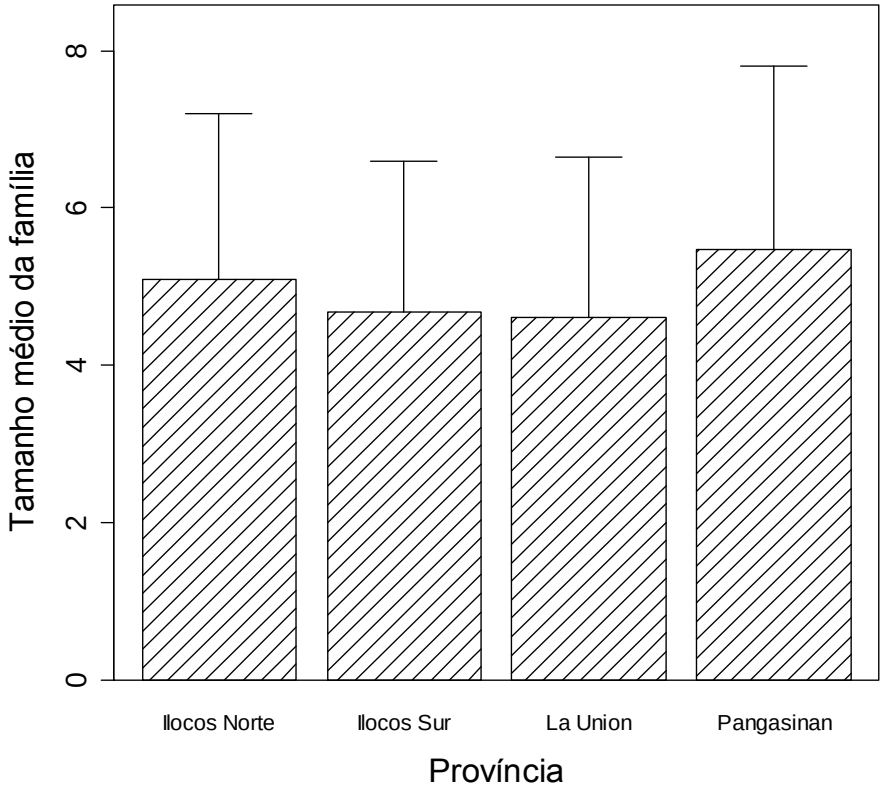
Gráfico de médias e desvios padrão do tamanho da família por província:

```
> limy = c(0, 1.1 * max(tabmed + sqrt(tabvar)))
```

```
> gbarras = barplot(gbarras = barplot(tabmed, xlab = "Província", ylab = "Tamanho médio da família", ylim = limy, col = "black", density = 10)
```

```
> arrows(gbarras, tabmed, gbarras, tabmed + sqrt(tabvar), angle = 90)
```

```
> box()
```



Exercício. Apresente o gráfico com níveis em ordem decrescente da média.

```
> fprov = table(province)
```

```
> (s2barra = weighted.mean(tabvar, fprov))
```

```
[1] 4.879207
```

```
> (R2 = 1 - s2barra / s2)
```

```
[1] 0.02429767
```

A variável `province` explica cerca de 2,4% da variabilidade do tamanho da família.