1. Temos de fazer combinações lineares dos elementos de S e analisar o resultado.

   (a) Tomando α e $\beta \in \mathbb{R}$, temos que $\alpha(1,1,1)+\beta(2,2,0)=(\alpha,\alpha,\alpha)+(2\beta,2\beta,0)=(\alpha+2\beta,\alpha+2\beta,\alpha)=(\gamma,\gamma,\alpha)$. Então $[S]=\{(\gamma,\gamma,\alpha)|\gamma,\alpha\in\mathbb{R}\}$. Observe que os vetores de S são linearmente independentes. Como $dim\,\mathbb{R}^3=3$ e S só possui dois elementos, disso podemos afirmar que $[S]\neq\mathbb{R}^3$.

   (b) Sendo α ,β ,γ e $\delta\in\mathbb{R}$, a combinação linear fica: $\alpha 1+\beta t+\gamma t^2+\delta(1+t^3)=(\alpha+\delta)1+\beta t+\gamma t^2+\delta t^3=\varepsilon 1+\beta t+\gamma t^2+\delta t^3$, onde ε , β , γ e δ são números reais quaisquer (podem assumir qualquer valor independentemente dos outros). Sendo assim, $[S]=P_3(\mathbb{R})$. Notemos que S possui $4(=dim\,P_3(\mathbb{R}))$ polinômios linearmente independentes...

   (c) Tomando α e $\beta\in\mathbb{R}$ ficamos com $\alpha\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0&0\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\alpha\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\-\beta&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\alpha\\-\beta&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\alpha\\\beta'&0\end{pmatrix}$. Logo $[S]=\left\{\begin{pmatrix}0&\alpha\\\beta'&0\end{pmatrix}:\alpha\,,\,\beta'\in\mathbb{R}\right\}$. Mais uma vez, atente para o fato de que há duas matrizes linearmente independentes em S enquanto que $dim\,M_2(\mathbb{R})=4$.

2. Esse é como se fosse o inverso do anterior, ou seja dado o espaço, encontrar um S que o gere.

   (a) Pela equação $x-2y=0$, obtemos $y=x/2$ de modo que os vetores de W são da forma $(x,x/2,z)=x(1,1/2,0)+z(0,0,1)$. Então, podemos tomar $S=\{(1,1/2,0),(0,0,1)\}$

   (b) Um polinômio arbitrário de $P_3(\mathbb{R})$ é dado por $p(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3$. A derivada (em relação a t) fica $p'(t)=a_1+2a_2t+3a_3t^2$. Mas os vetores de W são tais que $p'(t)=0$ (o 0 aqui representa o polinômio identicamente nulo, que é o polinômio cujos coeficientes a_i são todos nulos). Então, temos a seguinte relação $a_1+2a_2t+3a_3t^2=0=0+0t+0t^2$. Ora, uma igualdade dessas de ser satisfeita para os coeficientes dos termos de mesmo grau. Nesse caso ficamos com três equações $a_1=0$, $a_2=0$ e $a_3=0$. Então os polinômios de W são da forma $p(t)=a_0=a_0 1$. Portanto, podemos tomar $S=\{1\}$, onde esse 1 não é o número 1 mas o polinômio constante igual a 1.

   (c) É inteiramente análogo ao anterior.

   (d) Pegue um polinômio arbitrário $p(t)$ em $P_3(\mathbb{R})$ é faça $t=0$ e depois $t=1$, você encontrará relações entre os coeficientes a_i. Daí, reescreva o polinômio e faça como foi feito nos itens anteriores.

   (e) As matrizes que satisfazem a propriedade $A^t=A$ são ditas matrizes simétricas. Vejamos como é esse tipo de matriz (embora é provável que você já o saiba). Seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Como $A^t = A$ se igualarmos cada entrada das duas matrizes vemos que $b = c$ e as outras duas equações são redundantes. Então as matrizes simétricas são do tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$. Podemos escrever esse tipo de matriz como combinação linear das matrizes $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde vem que o conjunto das matrizes anteriores é o nosso S.

(f) Observe que A é uma matriz quadrada de ordem 3 e X é uma matriz 3 por 1. Então AX resulta numa matriz 3 por 1, de modo que o zero que aparece em $AX = 0$ é a matriz nula do espaço das matrizes 3 por 1. Tomando uma matriz 3 por 1 arbitrária $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e fazendo $AX = 0$, obtemos um sistema de três equações nas incógnitas x_1, x_2, x_3. Resolvendo o sistema, chegamos em $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Ou seja, $W = \{0\}$, e nesse caso $S = \{0\}$, pois qualquer combinação linear de 0 dá 0. Novamente, atente para o fato de que esse 0 é a matriz nula do espaço das matrizes 3 por 1.