2a. Lista de Exercícios de SMA333 – 26/03/2013

1. Encontre a fórmula para a n-ésima soma parcial de cada série e use-a para encontrar a soma da série se ela for convergente

   (a) $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{27} + \cdots$

   (b) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$

   (c) $\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \cdots$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n-1)(2n+1)}$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

   (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln(n+2)} - \frac{1}{\ln(n+1)}\right)$

   (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\arctan n} - \frac{1}{\arctan(n+1)}\right)$

2. Quais séries convergem e quais divergem? Justifique as suas respostas.

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\pi)$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{3^n}$

   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n}, \quad |x| > 1.$

3. Encontre os valores de x para os quais a série converge.

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$

   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{3+\sin x}\right)^n$

   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} (\ln x)^n$

4. (Curva do floco de neve de Helga von Koch) A curva do floco de neve de Helga von Koch é uma curva de comprimento infinito que engloba uma região de área finita. Para entender a razão disso, imagine que a curva é gerada a partir de um triângulo equilátero cujos lados tem comprimento igual a 1.

   (a) Encontre o comprimento L_n da n-ésima curva C_n e mostre que $\lim_{n\to\infty} L_n = \infty$.

   (b) Encontre a área A_n da região limitada por C_n e calcule $\lim_{n\to\infty} C_n$.

   http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Von_Koch_curve.gif

5. Use a série geométrica para mostrar que se $0 < x \leq 1$ então

   (a) $\arctan x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

   (b) $|\arctan x - \sum\limits_{n=0}^{k} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}| \leq \frac{x^{2k+3}}{2k+3}$.

   (c) Dê uma interpretação do item anterior em termos do erro da aproximação.

   (d) Verifique que $\frac{\pi}{4} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$.