ALGORITMOS E ESTRUTURAS DE DADOS II

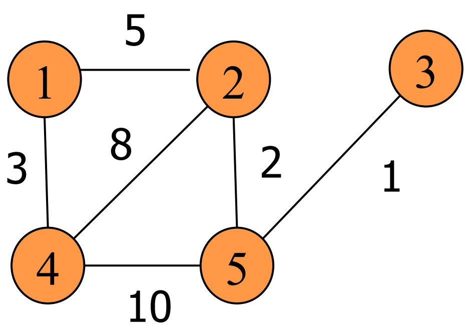
Grafos – Árvores Geradoras Mínimas

Profa. Elaine Parros Machado de Sousa
adaptações: Cristina Dutra de Aguiar Ciferri

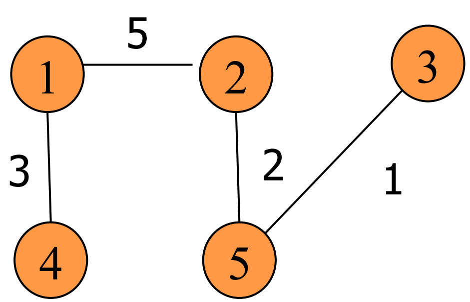
Material baseado em aulas dos professores:
Gustavo Batista, Robson Cordeiro, Moacir Ponti Jr. e
Maria Cristina Oliveira, Thiago A. S. Pardo

ÁRVORE GERADORA MÍNIMA: RELEMBRANDO DEFINIÇÕES

- **Árvore** (ou árvore livre)**:**
  - um **grafo conexo acíclico**.
- **Árvore geradora** *(spanning tree)* de um grafo conexo:
  - um **subgrafo gerador** que é uma **árvore** => contém todos os vértices
- **Árvore geradora mínima** (*minimum spanning tree*):
  - uma árvore geradora com a **menor soma de pesos** de arestas



grafo



árvore geradora mínima

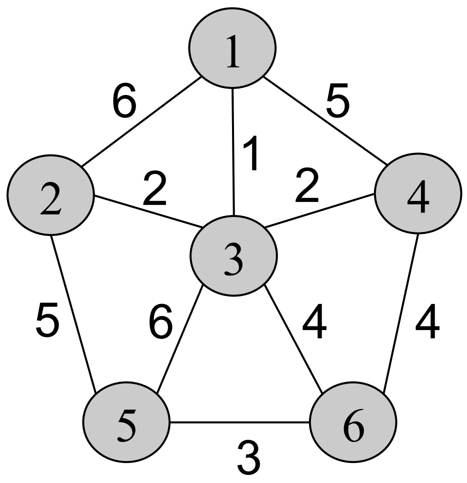
Árvore Geradora Mínima: Algoritmos

- Dois algoritmos bastante conhecidos
  - Algoritmo de Prim
  - Algoritmo de Kruskal
- Características
  - algoritmos “gulosos”
  - encontram a árvore geradora mínima de um grafo não direcionado

ÁRVORE GERADORA MÍNIMA: ALGORITMO DE PRIM

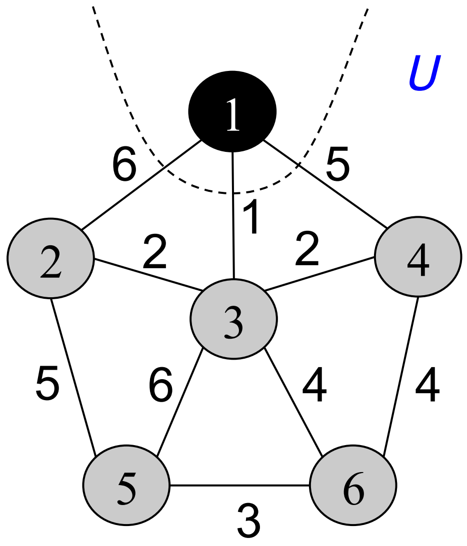
- Ideia geral
  1) Começar com um vértice **v** qualquer, e adicioná-lo a um conjunto **U**;
  2) Escolher a aresta de menor peso que conecta um vértice em **U** a um vértice em **V-U**;
  3) Incluir o vértice da aresta escolhida em **U**;
  4) Incluir a aresta escolhida em um conjunto **T;**
  5) Voltar ao passo 2 enquanto **U ≠ V**.

ÁRVORE GERADORA MÍNIMA: ALGORITMO DE PRIM - EXEMPLO



vértice de início: 1

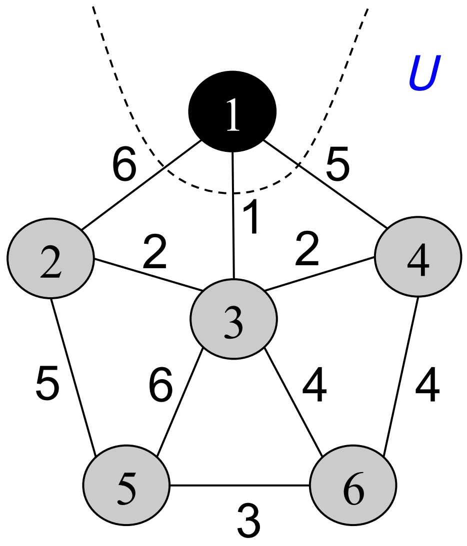
ÁRVORE GERADORA MÍNIMA: ALGORITMO DE PRIM - EXEMPLO



algoritmo: adicionar vértice ao conjunto U

U = {1}
T =

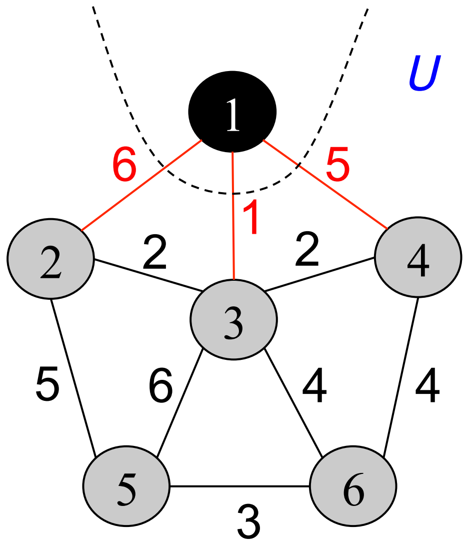
Árvore Geradora Mínima: Algoritmo de Prim - Exemplo



<u>algoritmo</u>: escolher a aresta de menor peso que conecta um vértice em U a um vértice em V-U

U = {1}
T =

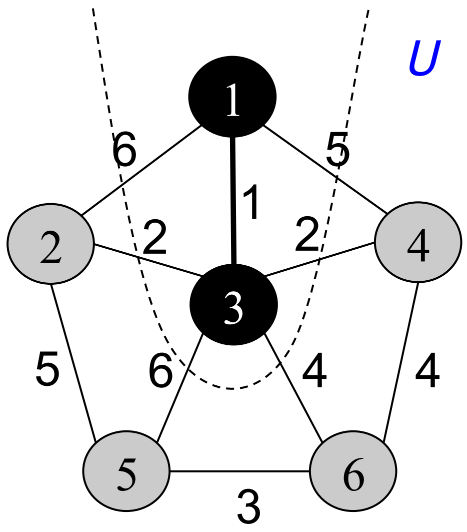
Árvore Geradora Mínima: Algoritmo de Prim - Exemplo



algoritmo: escolher a aresta de menor peso que conecta um vértice em U a um vértice em V-U

U = {1}
T =

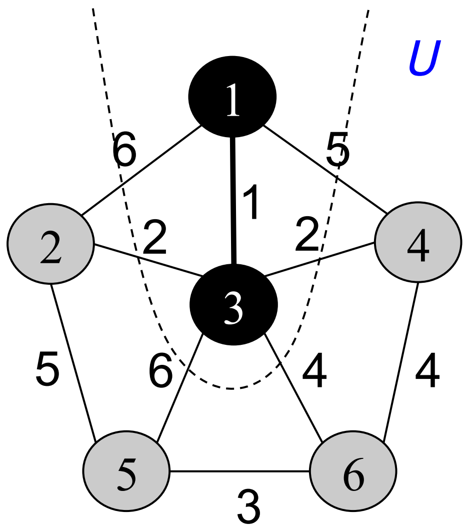
Árvore Geradora Mínima: Algoritmo de Prim - Exemplo



algoritmo: incluir o vértice da aresta escolhida em U
incluir a aresta escolhida em T

U = {1,3}
T = {(1,3)}

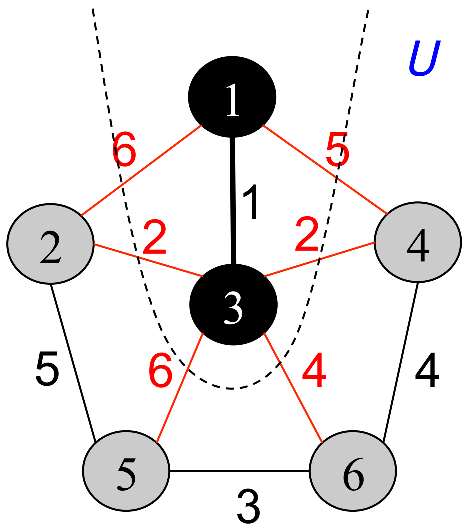
ÁRVORE GERADORA MÍNIMA: ALGORITMO DE PRIM - EXEMPLO



<u>algoritmo</u>: escolher a aresta de menor peso que conecta um vértice em U a um vértice em V-U

U = {1,3}
T = {(1,3)}

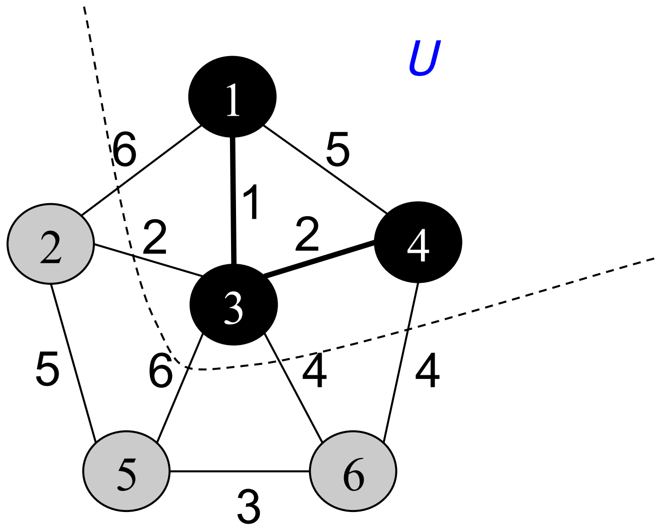
ÁRVORE GERADORA MÍNIMA: ALGORITMO DE PRIM - EXEMPLO



algoritmo: escolher a aresta de menor peso que conecta um vértice em U a um vértice em V-U

U = {1,3}
T = {(1,3)}

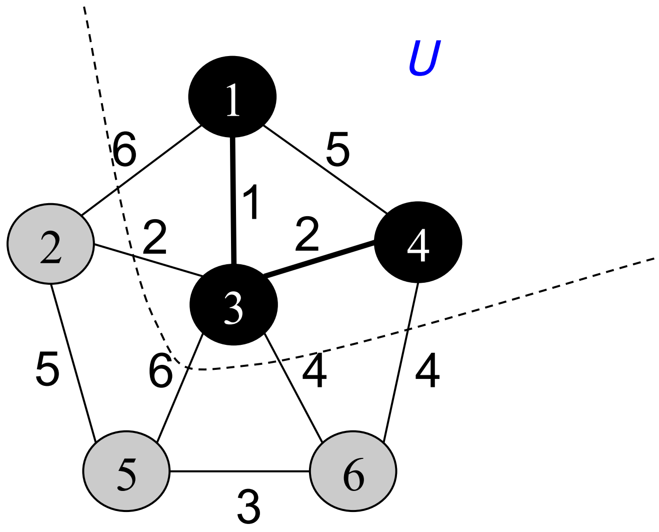
ÁRVORE GERADORA MÍNIMA: ALGORITMO DE PRIM - EXEMPLO



<u>algoritmo</u>: incluir o vértice da aresta escolhida em U
incluir a aresta escolhida em T

U = {1,3,4}
T = {(1,3),(3,4)}

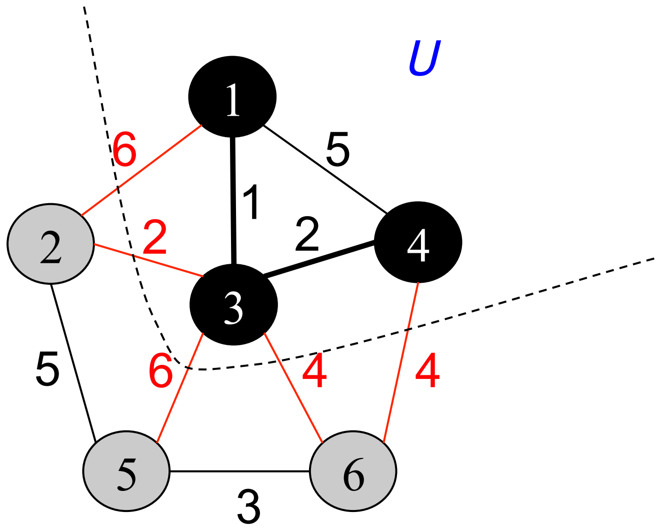
Árvore Geradora Mínima: Algoritmo de Prim - Exemplo



algoritmo: escolher a aresta de menor peso que conecta um vértice em U a um vértice em V-U

U = {1,3,4}
T = {(1,3),(3,4)}

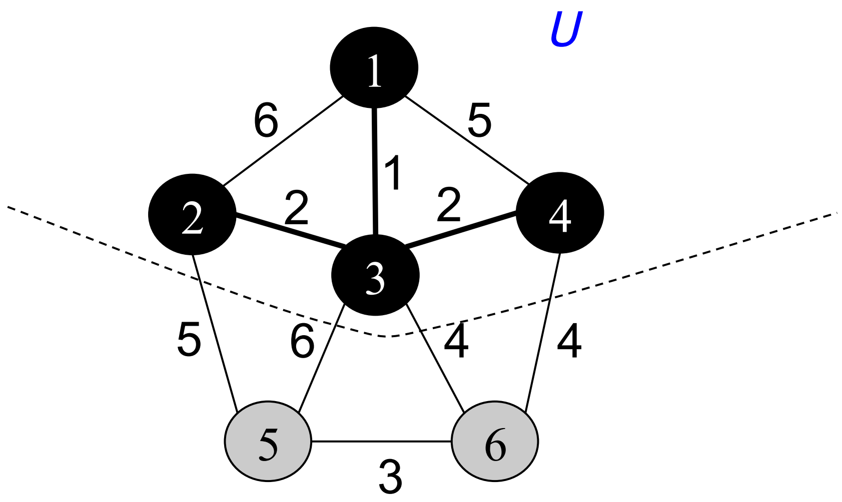
Árvore Geradora Mínima: Algoritmo de Prim - Exemplo



<u>algoritmo</u>: escolher a aresta de menor peso que conecta um vértice em U a um vértice em V-U

U = {1,3,4}
T = {(1,3),(3,4)}

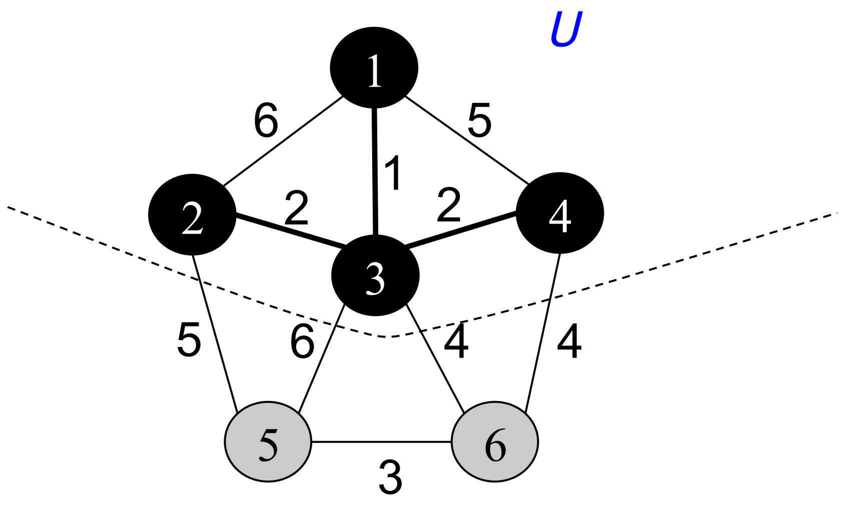
Árvore Geradora Mínima: Algoritmo de Prim - Exemplo



algoritmo: incluir o vértice da aresta escolhida em U
incluir a aresta escolhida em T

U = {1,3,4,2}
T = {(1,3),(3,4),(2,3)}

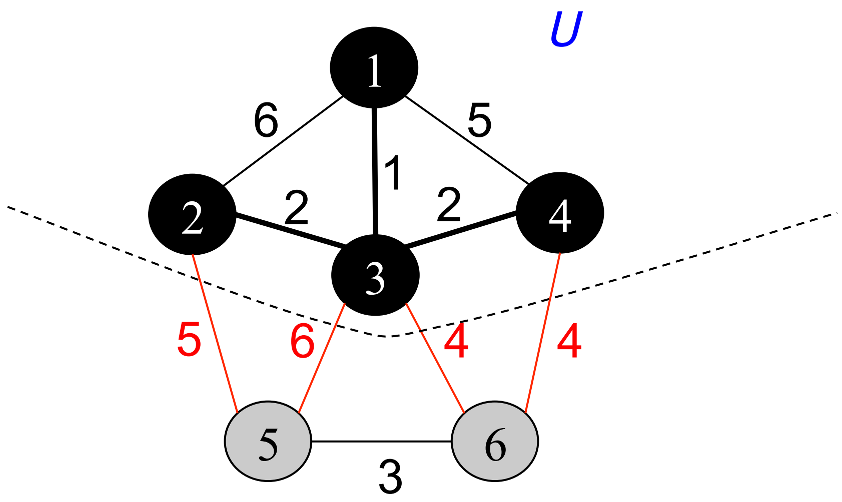
ÁRVORE GERADORA MÍNIMA: ALGORITMO DE PRIM - EXEMPLO



<u>algoritmo</u>: escolher a aresta de menor peso que conecta um vértice em U a um vértice em V-U

U = {1,3,4,2}
T = {(1,3),(3,4),(2,3)}

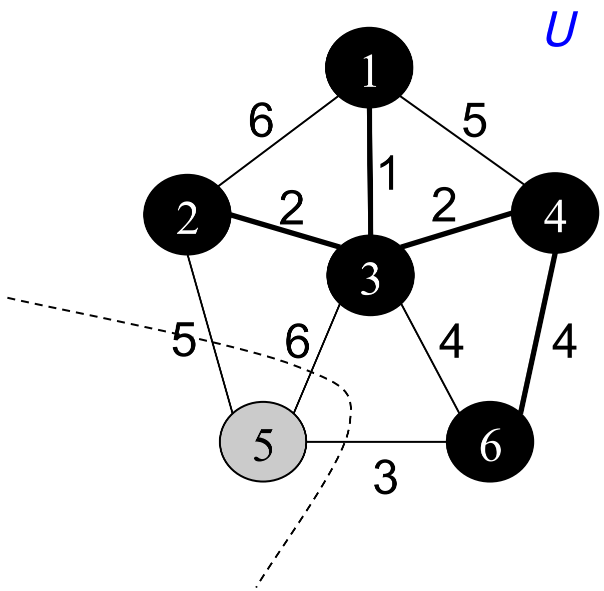
Árvore Geradora Mínima: Algoritmo de Prim - Exemplo



<u>algoritmo</u>: escolher a aresta de menor peso que conecta um vértice em U a um vértice em V-U

U = {1,3,4,2}
T = {(1,3),(3,4),(2,3)}

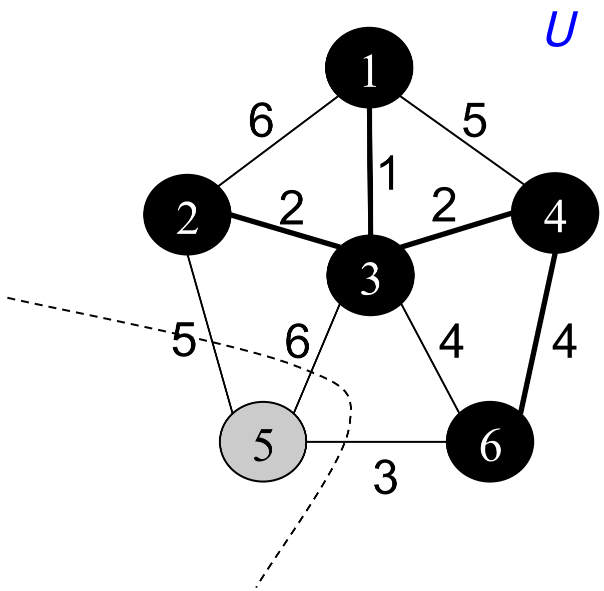
Árvore Geradora Mínima: Algoritmo de Prim - Exemplo



algoritmo: incluir o vértice da aresta escolhida em U
incluir a aresta escolhida em T

U = {1,3,4,2,6}
T = {(1,3),(3,4),(2,3),(4,6)}

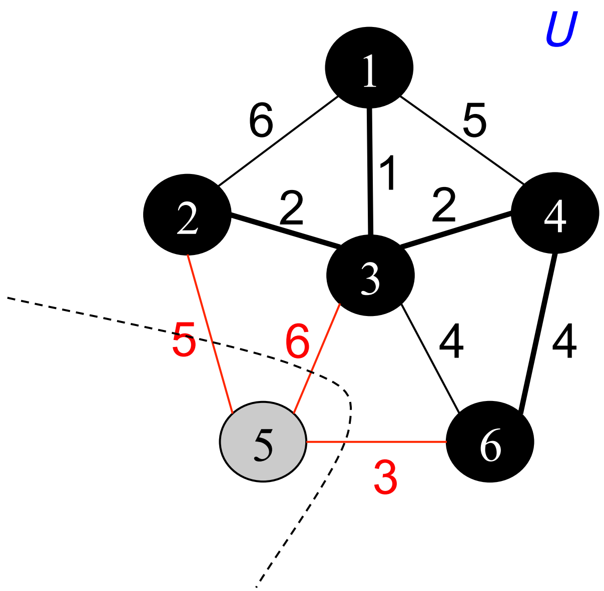
Árvore Geradora Mínima: Algoritmo de Prim - Exemplo



algoritmo: escolher a aresta de menor peso que conecta um vértice em U a um vértice em V-U

U = {1,3,4,2,6}
T = {(1,3),(3,4),(2,3),(4,6)}

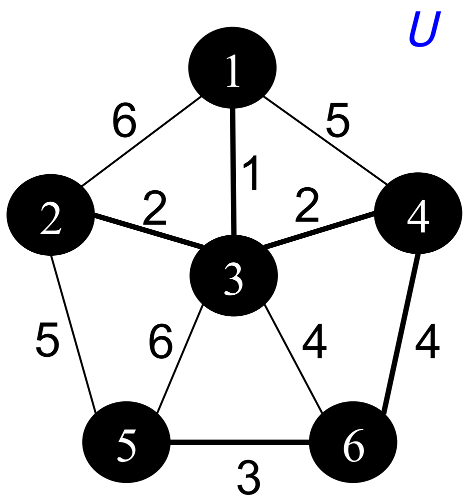
ÁRVORE GERADORA MÍNIMA: ALGORITMO DE PRIM - EXEMPLO



algoritmo: escolher a aresta de menor peso que conecta um vértice em U a um vértice em V-U

U = {1,3,4,2,6}
T = {(1,3),(3,4),(2,3),(4,6)}

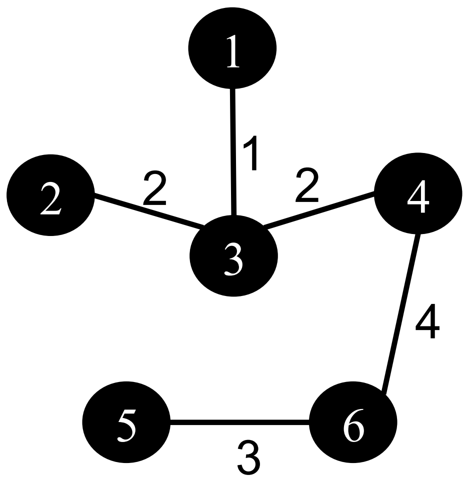
ÁRVORE GERADORA MÍNIMA: ALGORITMO DE PRIM - EXEMPLO



<u>algoritmo</u>: incluir o vértice da aresta escolhida em U
incluir a aresta escolhida em T

U = {1,3,4,2,6,5}
T = {(1,3),(3,4),(2,3),(4,6),(5,6)}

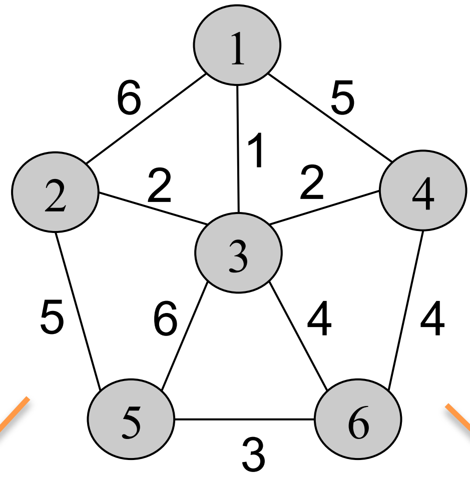
Árvore Geradora Mínima: Algoritmo de Prim - Exemplo

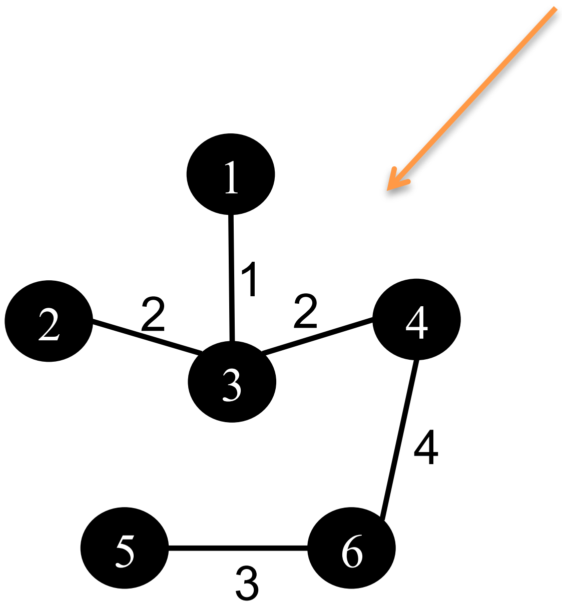


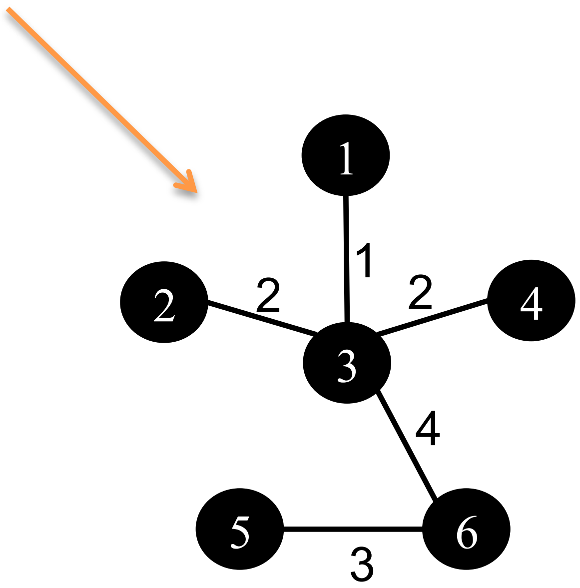
FIM DO ALGORITMO

ÁRVORE GERADORA MÍNIMA: ALGORITMO DE PRIM - EXEMPLO

Dado um grafo G, pode existir mais de uma árvore geradora mínima para G







Árvore Geradora Mínima: Algoritmo de Prim

```
procedimento Prim(var Grafo: TGrafo;
                  var T: conjunto de arestas)
variáveis
      u, v: TVertice;
      U: conjunto de TVertice;
início
      T := ∅;
      U := {1};
      enquanto U ≠ V faça
      início
          seja (u, v) a aresta de menor peso
                tal que (u ∈ U) e (v ∈ V-U)
         T := T ∪ {(u, v)};
         U := U ∪ {v};
      fim
fim
```

ALGORITMO DE PRIM: COMPLEXIDADE

Eficiência do algoritmo de Prim depende de como será feita a seleção da aresta **(u, v)**

- Implementação simples com dois vetores:
  - **prox[i]** fornece o vértice em **U** atualmente mais próximo ao vértice **i** em **V-U**.
  - **mc[i]** fornece o custo da aresta **(i, prox[i])**.
  - operação de encontrar **(u, v)** **=>** percorrer o vetor **mc** **=> O(|V|)**
    - necessário atualizar os vetores **prox** e **mc** a cada novo vértice em U
- Complexidade dessa implementação
  - **$O(|V|^2)$**.

Algoritmo de Prim: Complexidade

Eficiência do algoritmo de Prim depende de como será feita a seleção da aresta **(u, v)**

- Implementação mais sofisticada:
  - fila de prioridade para manter os vértices em **V-U**.
  - chave da fila de prioridade de um vértice **v** $\in$ **V-U** é o peso da aresta mais leve que liga **v** a um vértice de **U**.
  - se a fila de prioridade for implementada com um *heap*
- Complexidade dessa implementação
  - **O(|A| log |V|)**.

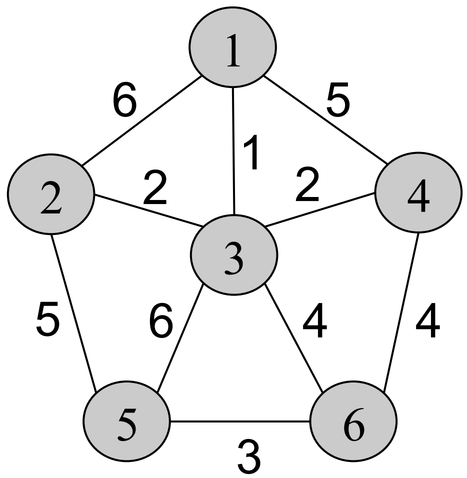
Árvore Geradora Mínima: Algoritmo de Kruskal

- Ideia geral:
  - inicia-se com um grafo $G' = (V, \emptyset)$
  - cada vértice é um componente conexo de si mesmo
  - a cada iteração, são construídos componentes conexos cada vez maiores

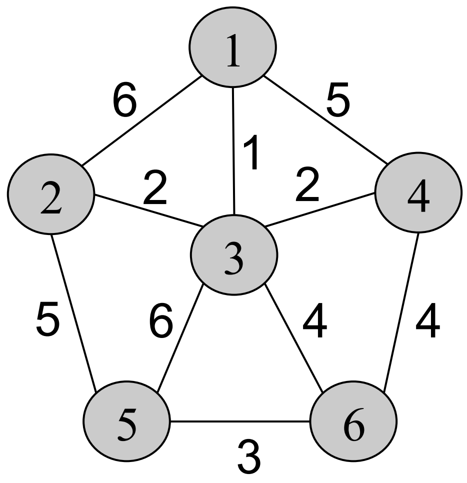
ÁRVORE GERADORA MÍNIMA: ALGORITMO DE KRUSKAL

- Ideia geral $_{\text{(cont.)}}$:
  - para “aumentar” os componentes conexos => arestas em **A** são analisadas por **ordem ascendente** de peso.
    - **Q**: contém as arestas de G ordenadas pelo peso
  - se a aresta conecta dois vértices em dois componentes separados => a aresta é adicionada a **T**.
  - se a aresta conecta dois vértices do mesmo componente => ela é descartada, pois criaria um ciclo.

Árvore Geradora Mínima: Algoritmo de Kruskal - Exemplo



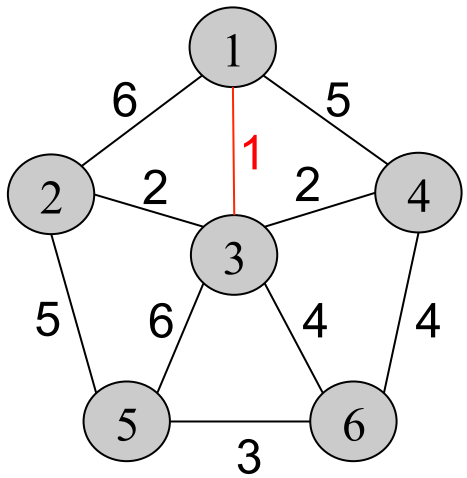
Árvore Geradora Mínima: Algoritmo de Kruskal - Exemplo



no início, cada vértice é um componente distinto

Q = {(1,3),(2,3),(3,4),(5,6),(3,6),(4,6),(1,4),(2,5),(1,2),(3,5)}
T =

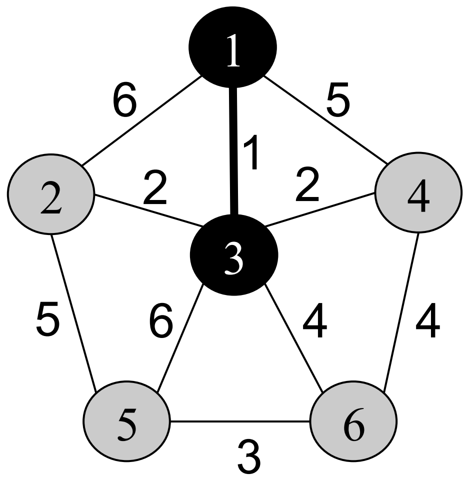
Árvore Geradora Mínima: Algoritmo de Kruskal - Exemplo



algoritmo: escolher a aresta de menor peso que conecta dois componentes distintos

Q = {(1,3),(2,3),(3,4),(5,6),(3,6),(4,6),(1,4),(2,5),(1,2),(3,5)}
T =

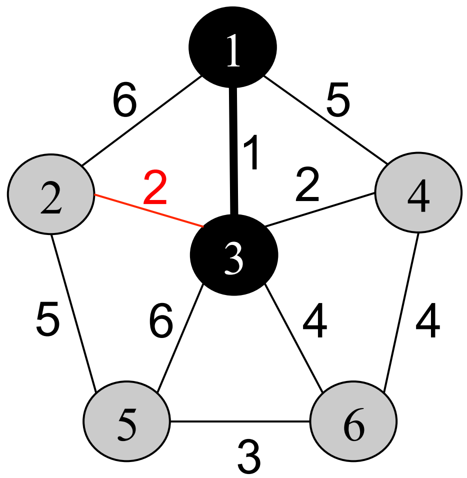
Árvore Geradora Mínima: Algoritmo de Kruskal - Exemplo



algoritmo: adicionar aresta a T

Q = {(2,3),(3,4),(5,6),(3,6),(4,6),(1,4),(2,5),(1,2),(3,5)}
T = {(1,3)}

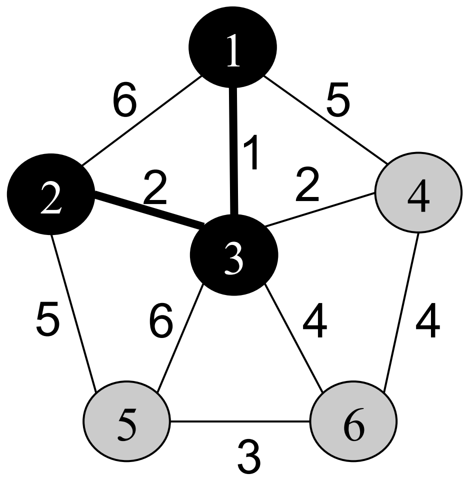
Árvore Geradora Mínima: Algoritmo de Kruskal - Exemplo



algoritmo: escolher a aresta de menor peso que conecta dois componentes distintos

Q = {(2,3),(3,4),(5,6),(3,6),(4,6),(1,4),(2,5),(1,2),(3,5)}
T = {(1,3)}

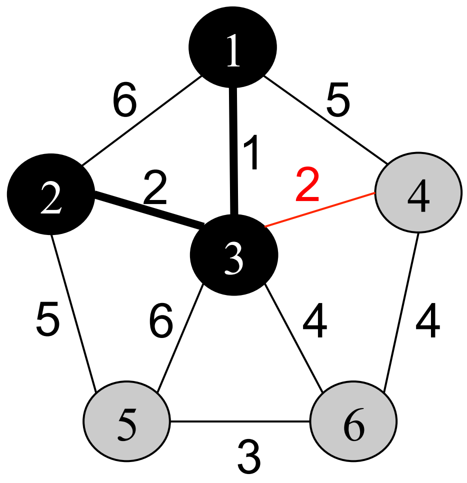
Árvore Geradora Mínima: Algoritmo de Kruskal - Exemplo



algoritmo: adicionar aresta a T

Q = {(3,4),(5,6),(3,6),(4,6),(1,4),(2,5),(1,2),(3,5)}
T = {(1,3),(2,3)}

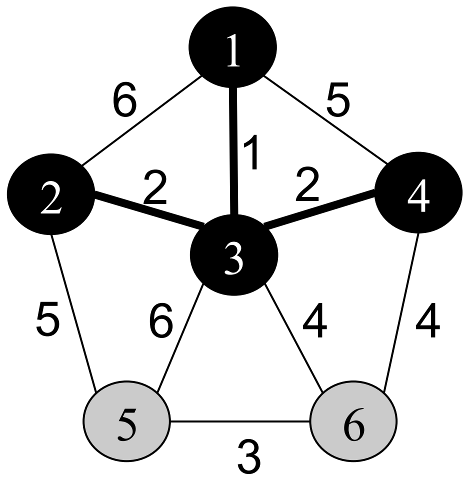
ÁRVORE GERADORA MÍNIMA: ALGORITMO DE KRUSKAL - EXEMPLO



algoritmo: escolher a aresta de menor peso que conecta dois componentes distintos

Q = {(3,4),(5,6),(3,6),(4,6),(1,4),(2,5),(1,2),(3,5)}
T = {(1,3),(2,3)}

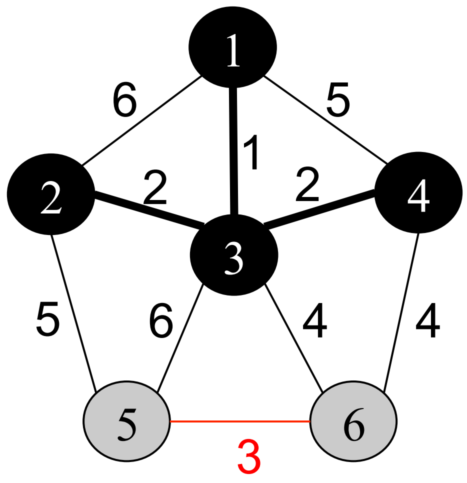
Árvore Geradora Mínima: Algoritmo de Kruskal - Exemplo



algoritmo: adicionar aresta a T

Q = {(5,6),(3,6),(4,6),(1,4),(2,5),(1,2),(3,5)}
T = {(1,3),(2,3),(3,4)}

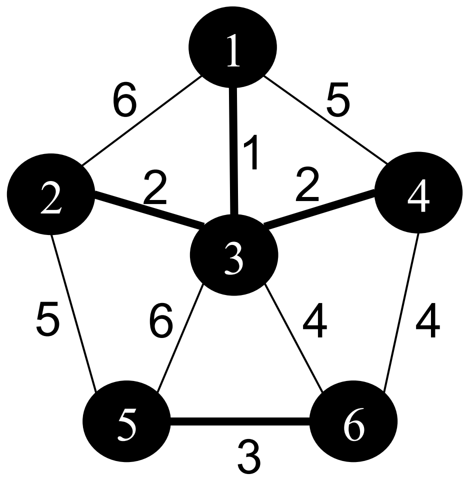
Árvore Geradora Mínima: Algoritmo de Kruskal - Exemplo



algoritmo: escolher a aresta de menor peso que conecta dois componentes distintos

Q = {(5,6),(3,6),(4,6),(1,4),(2,5),(1,2),(3,5)}
T = {(1,3),(2,3),(3,4)}

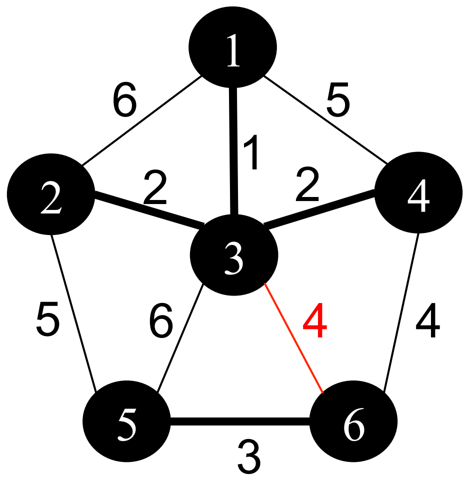
ÁRVORE GERADORA MÍNIMA: ALGORITMO DE KRUSKAL - EXEMPLO



algoritmo: adicionar aresta a T

Q = {(3,6),(4,6),(1,4),(2,5),(1,2),(3,5)}
T = {(1,3),(2,3),(3,4),(5,6)}

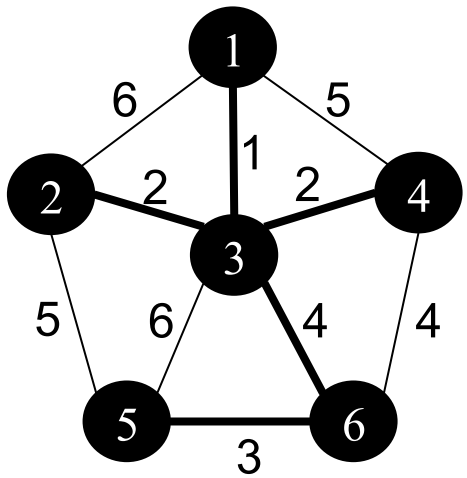
Árvore Geradora Mínima: Algoritmo de Kruskal - Exemplo



algoritmo: escolher a aresta de menor peso que conecta dois componentes distintos

Q = {(3,6),(4,6),(1,4),(2,5),(1,2),(3,5)}
T = {(1,3),(2,3),(3,4),(5,6)}

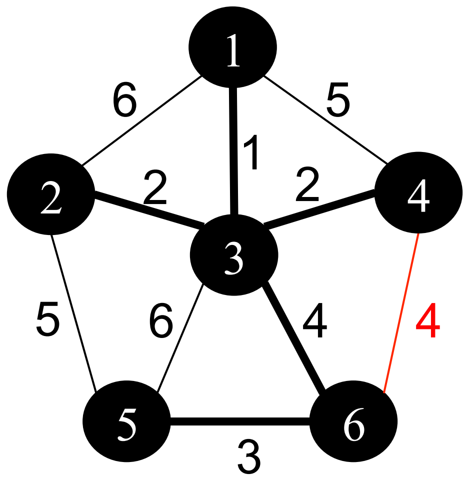
Árvore Geradora Mínima: Algoritmo de Kruskal - Exemplo



algoritmo: adicionar aresta a T

Q = {(4,6),(1,4),(2,5),(1,2),(3,5)}
T = {(1,3),(2,3),(3,4),(5,6),(3,6)}

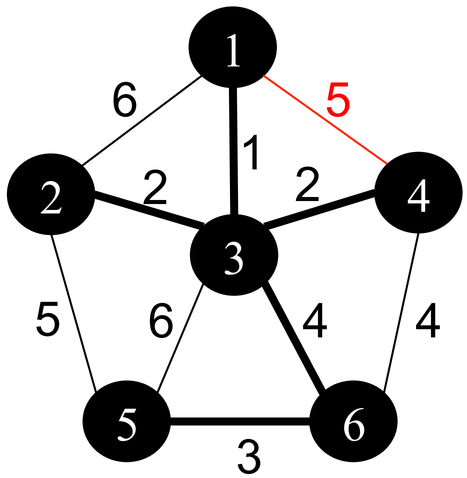
Árvore Geradora Mínima: Algoritmo de Kruskal - Exemplo



<u>algoritmo</u>: descartar a aresta de menor peso, desde que ela conecta dois vértices do mesmo componente

Q = {(4,6),(1,4),(2,5),(1,2),(3,5)}
T = {(1,3),(2,3),(3,4),(5,6),(3,6)}

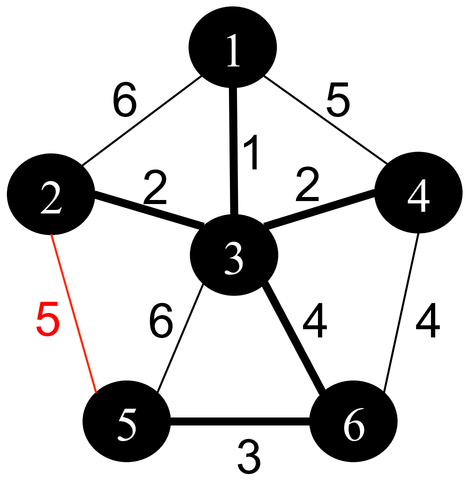
Árvore Geradora Mínima: Algoritmo de Kruskal - Exemplo



algoritmo: descartar a aresta de menor peso, desde que ela conecta dois vértices do mesmo componente

Q = {(1,4),(2,5),(1,2),(3,5)}
T = {(1,3),(2,3),(3,4),(5,6),(3,6)}

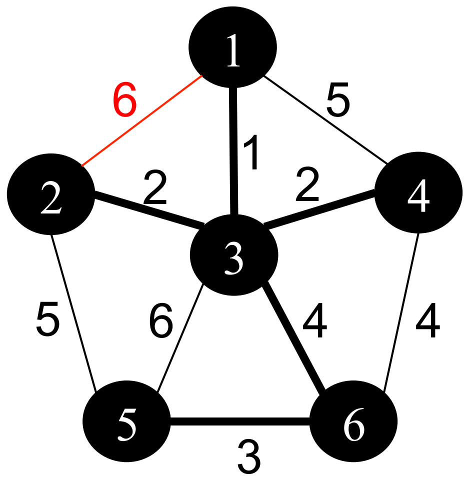
ÁRVORE GERADORA MÍNIMA: ALGORITMO DE KRUSKAL - EXEMPLO



<u>algoritmo</u>: descartar a aresta de menor peso, desde que ela conecta dois vértices do mesmo componente

Q = {(2,5),(1,2),(3,5)}
T = {(1,3),(2,3),(3,4),(5,6),(3,6)}

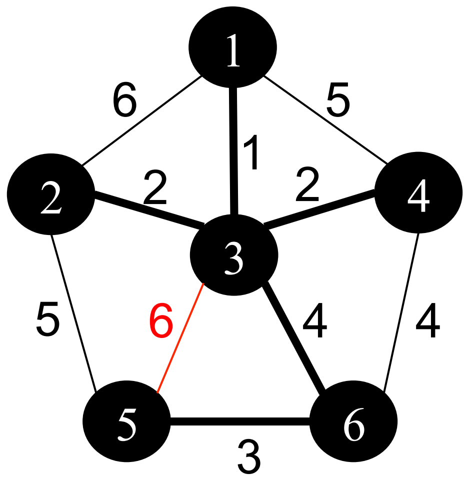
Árvore Geradora Mínima: Algoritmo de Kruskal - Exemplo



algoritmo: descartar a aresta de menor peso, desde que ela conecta dois vértices do mesmo componente

Q = {(1,2),(3,5)}
T = {(1,3),(2,3),(3,4),(5,6),(3,6)}

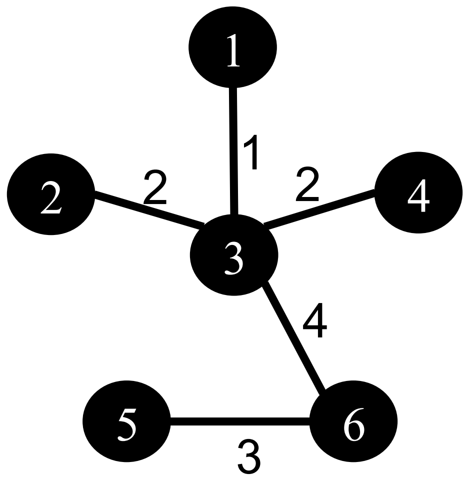
Árvore Geradora Mínima: Algoritmo de Kruskal - Exemplo



algoritmo: descartar a aresta de menor peso, desde que ela conecta dois vértices do mesmo componente

Q = {(3,5)}
T = {(1,3),(2,3),(3,4),(5,6),(3,6)}

Árvore Geradora Mínima: Algoritmo de Kruskal - Exemplo



FIM DO ALGORITMO

Árvore Geradora Mínima: Algoritmo de Kruskal

```
procedimento Kruskal(var Grafo: TGrafo;
                           var T: conjunto de arestas)
variáveis
        u, v: TVertice;
        U_1,...,U_n: conjunto de TVertice;
        Q: fila de prioridade;
início
        T := ∅;
        Q := as arestas de G ordenadas pelo seu peso;
        para i:=1 até Grafo.NumVertices faça
                U_i := {i};
        enquanto houver arestas em Q faça
        início
                seja (u, v) a aresta de menor peso de Q tal que
                        (u ∈ U_p) e (v ∈ U_q) e (U_p ∩ U_q)= ∅
                T := T ∪ {(u, v)};
                U_p := U_p ∪ U_q;
                eliminar U_q;
        fim
fim
```

ALGORITMO DE KRUSKAL: COMPLEXIDADE

Eficiência do algoritmo de Kruskal depende de dois fatores principais:

- encontrar a aresta de menor peso
- verificar se a aresta conecta dois componentes distintos ($U_p \cap U_q$)

- Implementação mais sofisticada:
  - **Q** implementada como uma fila de prioridade com um *heap*
  - operação de conjuntos eficiente
- Complexidade dessa implementação
  - $O(|A| \log |A|)$.

mais eficiente do que o algoritmo de Prim para grafos esparsos

BIBLIOGRAFIA

- N. Ziviani. Projeto de Algoritmos, Thomson, 2a. Edição, 2004.

- T. H. Cormen, C. E. Leiserson and R. L. Rivest. Introduction to Algorithms, MIT Press, 2nd Edition, 2001.