ICMC – USP

SME 5779 – Inferência Estatística – 2013/1

11ª lista de exercícios

1. $X_1, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória de uma população $\mathsf{Laplace}(\theta)$, com função densidade $f(x;\theta) = \exp(-|x|/\theta)/(2\theta) \times I_{\mathbb{R}}(x)$, $\theta > 0$.

    (a) Prove que $\sum_{i=1}^n |X_i|$ é suficiente para θ e que $2\sum_{i=1}^n |X_i|/\theta \sim \chi^2_{2n}$.

    (b) Apresente um intervalo de confiança de $100(1-\alpha)\%$ para θ, indicando como obter o intervalo de amplitude mínima.

2. $X_1, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória de uma população com função densidade $f(x;\theta) = \exp\{-(x-\theta)\} \times I_{(\theta,\infty)}(x)$, $\theta \in \mathbb{R}$. Com base na estatística $X_{(1)} = \min(X_1, \ldots, X_n)$ (É suficiente?), apresente o intervalo de confiança de $100(1-\alpha)\%$ de amplitude mínima para θ.

3. Uma observação é coletada de uma população com função densidade

$$f(x;\theta) = 2\frac{x-\theta}{(b_0-\theta)^2} I_{(\theta,b_0)}(x),$$

   sendo que $b_0 > \theta$ é conhecido.

    (a) Prove que $(X-\theta)/(b_0-\theta)$ é um pivô.

    (b) Prove que

$$\left(\frac{X-b_0a_2}{1-a_2}, \frac{X-b_0a_1}{1-a_1}\right)$$

    é um intervalo de confiança de $100(1-\alpha)\%$ para θ, em que a_1 e a_2 são tais que $1-\alpha = a_2^2 - a_1^2$.

    (c) Calcule a amplitude do intervalo acima.

4. Considere $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{normal}(\mu, \sigma^2)$.

    (a) Supondo $\mu = \mu_0$ conhecido, apresente intervalos de confiança de $100(1-\alpha)\%$ para σ^2 e σ.

    (b) Supondo μ desconhecido, apresente intervalos de confiança de $100(1-\alpha)\%$ para σ^2 e σ.

    (c) Nos dois itens anteriores, indique como obter os intervalos de amplitude mínima.

5. Para cada uma das seguintes situações, apresente um pivô com base em uma amostra de tamanho $n = 1$.
   (a) $f(x;\theta) = 2(\theta - x)/\theta^2 \times I_{(0,\theta)}(x)$.
   (b) Exercício 2.
   (c) $f(x;\theta) = \exp(-x/\theta)/\theta \times I_{(0,\infty)}(x)$, $\theta > 0$.
   (d) $f(x;\theta) = x\exp(-x/\theta)/\theta^2 \times I_{(0,\infty)}(x)$, $\theta > 0$.
   (e) $X \sim \mathsf{normal}(0, \sigma^2)$.