

Ajuste de distribuições

Método de máxima verossimilhança

2021

A distribuição exponencial exponencializada (Gupta & Kundu, 2001, Exponentiated exponential family: An alternative to gamma and Weibull distributions. *Biometrical Journal* 43, 117–130) tem função distribuição acumulada

$$F(x; \alpha, \lambda) = (1 - e^{-\lambda x})^\alpha, \text{ para } x > 0 \text{ e } F(x; \alpha, \lambda) = 0, \text{ para } x \leq 0,$$

em que $\alpha > 0$ (parâmetro de forma) e $\lambda > 0$ (parâmetro de taxa). Esta distribuição é utilizada como uma alternativa às distribuições gama e Weibull na modelagem de dados positivos. Sua função densidade é dada por

$$f(x; \alpha, \lambda) = \alpha \lambda (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \text{ para } x > 0 \text{ e } f(x; \alpha, \lambda) = 0, \text{ para } x \leq 0.$$

Nota 1 A distribuição exponencial é obtida com $\alpha = 1$.

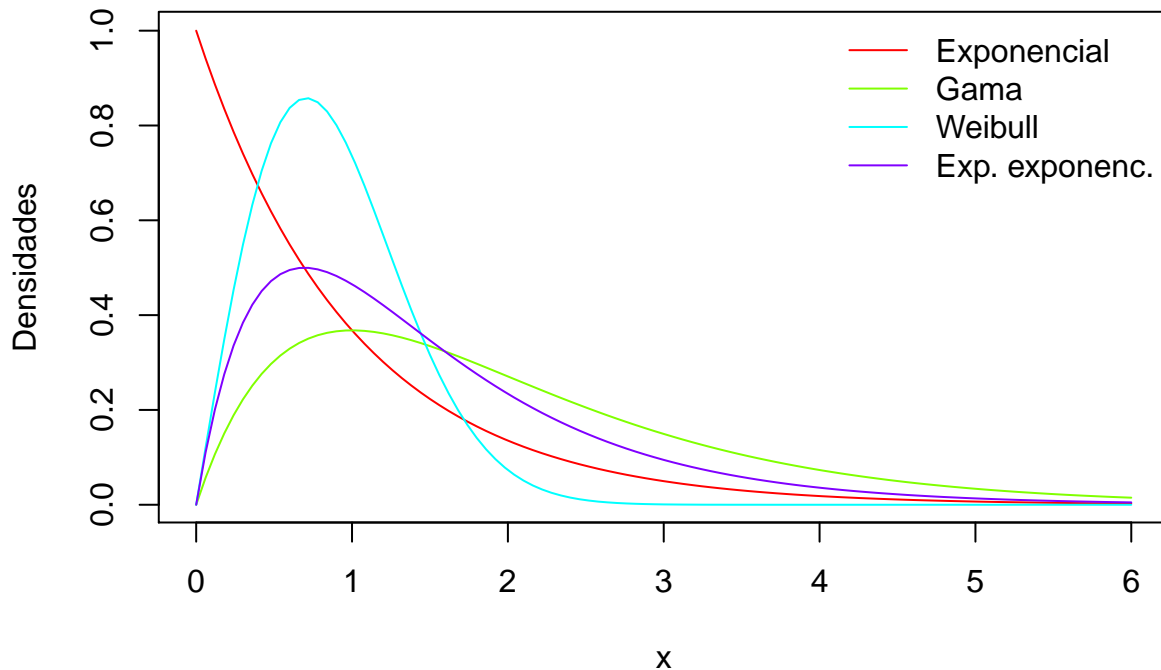
```
# Função distribuição acumulada - exponencial exponencializada
peexp <- function(x, shape, rate = 1) {
  cdf <- (1 - exp(-rate * x))^shape
  return(cdf)
}
```

```
# Função densidade - exponencial exponencializada
deexp <- function(x, shape, rate = 1) {
  elam <- exp(-rate * x)
  dens <- shape * rate * (1 - elam)^(shape - 1) * elam
  return(dens)
}
```

Em seguida comparamos as distribuições exponencial, gama, Weibull e exponencial exponencializada.

```
mycolors <- rainbow(4)

curve(dexp(x, rate = 1), col = mycolors[1], ylab = "Densidades",
      from = 0, to = 6)
curve(dgamma(x, shape = 2, rate = 1), add = TRUE, col = mycolors[2])
curve(dweibull(x, shape = 2, scale = 1), add = TRUE, col = mycolors[3])
curve(deexp(x, shape = 2, rate = 1), add = TRUE, col = mycolors[4])
legend("topright", c("Exponencial", "Gama", "Weibull",
                    "Exp. exponenc."), lty = 1, col = mycolors, bty = "n")
```



```
# Pacote com a função fitdistr (método de máxima verossimilhança)
library(MASS)

# Dados. Milhões de ciclos até a falha de rolamentos de uma máquina.
x <- c(17.88, 28.92, 33.00, 41.52, 42.12, 45.60, 48.80, 51.84, 51.96,
       54.12, 55.56, 67.80, 68.64, 68.64, 68.88, 84.12, 93.12, 98.64,
       105.12, 105.84, 127.92, 128.04, 173.40)
```

```
n <- length(x)
cat("\n n =", n)
```

```
##
## n = 23
```

As distribuições exponencial, gama, Weibull e exponencial exponencializada são ajustadas aos dados. A função `fitdistr` é usada, notando que valores iniciais são necessários apenas para o caso da distribuição exponencial exponencializada.

Nota 2 Os resultados são estimativa (erro padrão).

```
(lam1 <- 1 / mean(x))
```

```
## [1] 0.01384308
```

```
fitdistr(x, "exponential")
```

```
##      rate ( $\lambda$ )
## 0.013843080
## (0.002886482)
```

```
(mgam <- fitdistr(x, "gamma"))
```

```
##      shape ( $\alpha$ )      rate ( $\lambda$ )
## 4.0282346 0.0557632
## (1.1411710) (0.0168218)
```

```

(mwei <- fitdistr(x, "weibull"))

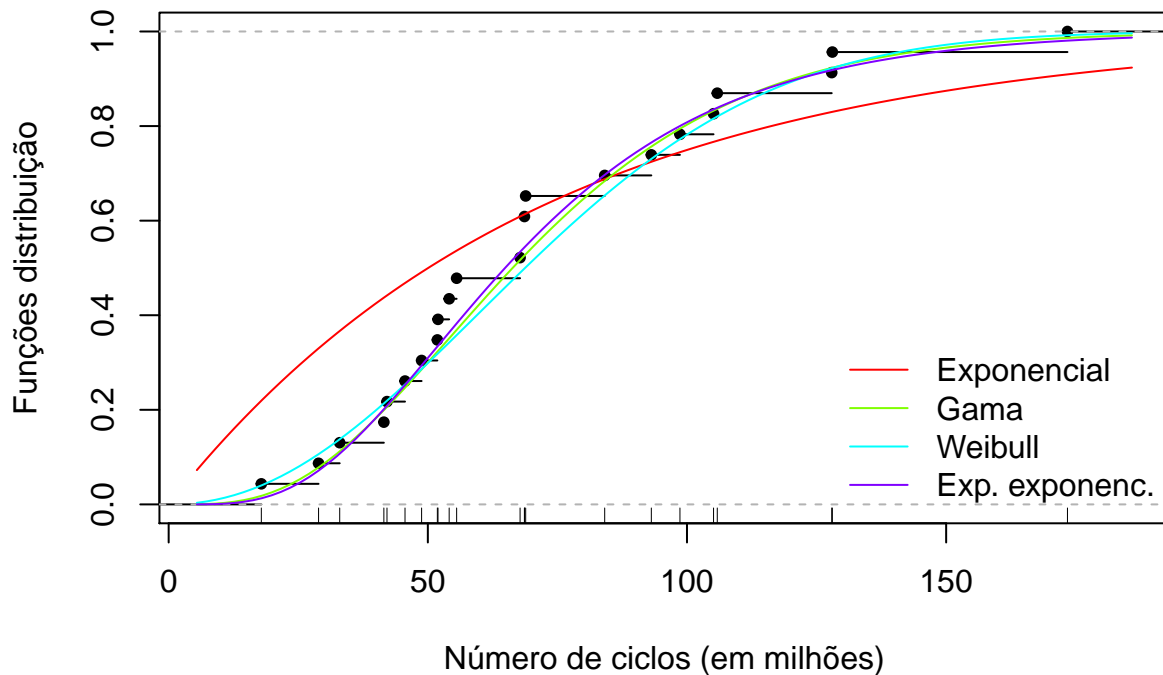
##      shape ( $\alpha$ )      scale ( $1/\lambda$ )
## 2.1022104 81.8542544
## (0.3287345) (8.5950685)

(meexp <- fitdistr(x, deexp, start = list(shape = mgam$estimate[1],
rate = lam1)))

##      shape ( $\alpha$ )      rate ( $\lambda$ )
## 5.294470603 0.032325097
## (2.053503609) (0.006416464)

plot(ecdf(x), main = "", xlab = "Número de ciclos (em milhões)",
     pch = 20, ylab = "Funções distribuição")
rug(x)
curve(pexp(x, rate = lam1), add = TRUE, col = mycolors[1])
curve(pgamma(x, shape = mgam$estimate[1], rate = mgam$estimate[2]),
     add = TRUE, col = mycolors[2])
curve(pweibull(x, shape = mwei$estimate[1], scale = mwei$estimate[2]),
     add = TRUE, col = mycolors[3])
curve(peexp(x, shape = meexp$estimate[1], rate = meexp$estimate[2]),
     add = TRUE, col = mycolors[4])
legend("bottomright", c("Exponencial", "Gama", "Weibull",
"Exp. exponenc."), lty = 1, col = mycolors, bty = "n")

```



Nota 3 Utilizando os métodos *bootstrap* e *jackknife*, apresente estimativas dos erros padrão dos estimadores dos parâmetros da distribuição exponencial exponencializada e compare com os resultados assintóticos.