Árvores AVL

Árvores Binárias de Busca

- Altura de uma árvore binária (AB): igual à profundidade, ou nível máximo, de suas folhas
- A eficiência da busca em árvore depende do seu balanceamento
- Algoritmos de inserção e remoção em ABB não garantem que a árvore gerada a cada passo seja balanceada
- Pergunta: Vale a pena balancear uma ABB de tempos em tempos?

Árvore Binária de Busca Aleatória

- ABB ´aleatória´
  - Nós externos: potenciais descendentes dos nós folha (não estão, de fato, na árvore; representam potenciais posições de futuras inserções)
  - Uma árvore A com *n* chaves possui *n*+1 nós externos
  - Uma inserção em A é considerada ´aleatória´ se ela tem probabilidade igual de acontecer em qualquer uma das *n*+1 posições de inserção.
  - Uma ABB aleatória com *n* chaves é uma árvore resultante de n inserções aleatórias sucessivas em uma árvore inicialmente vazia

Árvore Binária de Busca Aleatória

- Para uma ABB ´aleatória´, foi mostrado que o número esperado de comparações para recuperar um registro qualquer é cerca de $1{,}39*\log_2(n)$.
  - ou seja, 39% pior do que o custo do acesso em uma árvore perfeitamente balanceada
- Isto é: o balanceamento a cada operação aumenta o tempo e garante um desempenho melhor que numa árvore aleatória de, no máximo, 39% (o pior caso é muito raro!)
- Essa estratégia é aconselhável apenas se o número de buscas for muito maior do que o de inserções.
- A conservação do balanceamento pode ser mais simples se relaxarmos a condição de perfeitamente balanceada para balanceada apenas.

AB Balanceada *versus* AB Perfeitamente Balanceada

- Seja $h_b(n)$ a altura de uma AB balanceada. O seguinte resultado foi demonstrado:

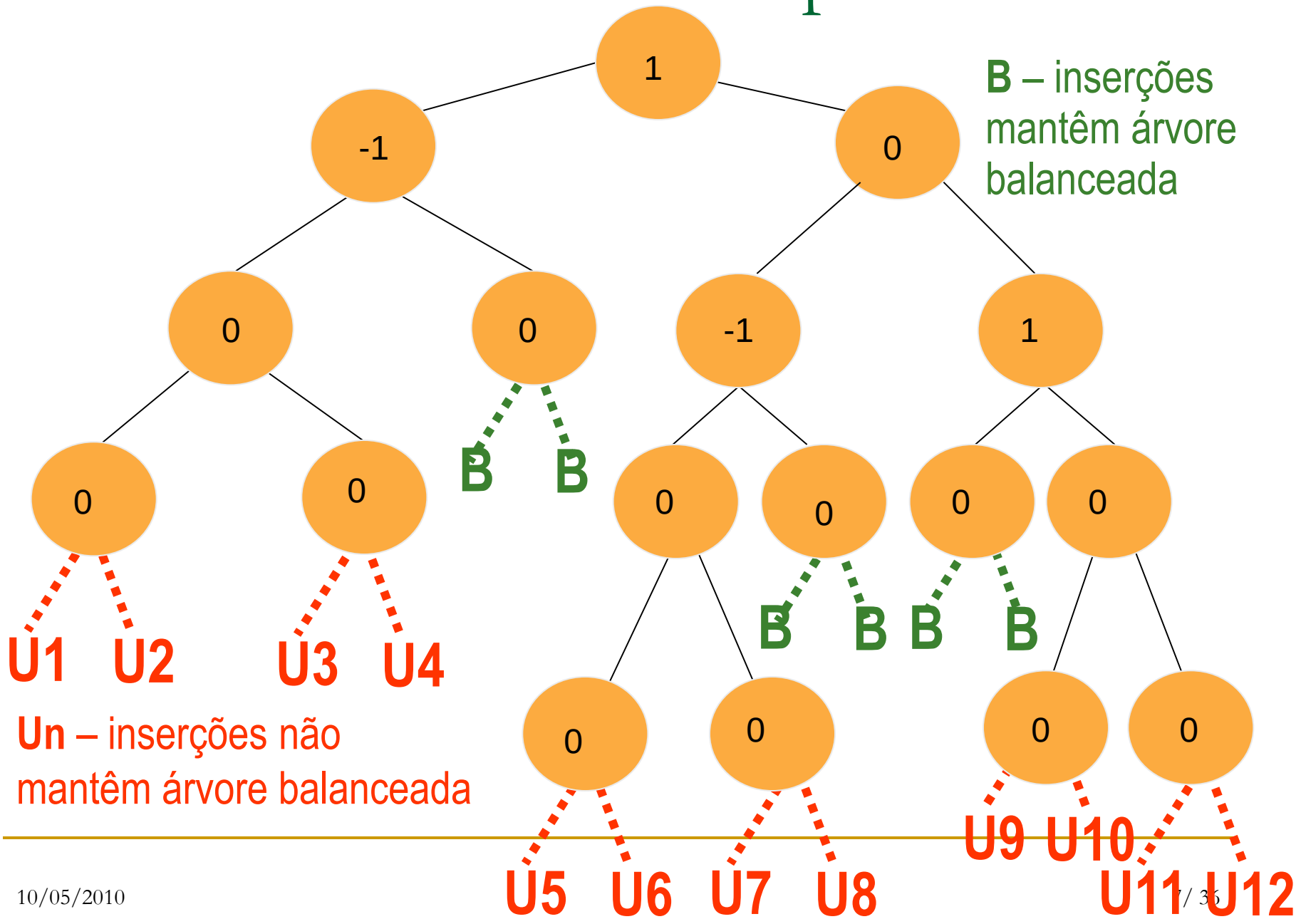
$$\log_2(n+1) \leq \underbrace{h_b(n)}_{\sim h_{pb}(n)} \leq 1.4404 \log_2(n+2) - 0.328$$

- Ou seja: Uma AB Balanceada nunca terá altura superior a 45% da altura de sua correspondente Perfeitamente Balanceada.
- As operações numa AB Balanceada serão portanto da $O(\log_2 n)$.

Árvores AVL

- Árvore AVL: ABB na qual as alturas das duas sub-árvores de todo nó nunca diferem em mais de 1. Ou seja, é uma ABB Balanceada.
  - Seja o Fator de Balanceamento de um Nó (FB) a altura de sua sub-árvore direita menos a altura de sua sub-árvore esquerda
  - Em uma árvore AVL todo nó tem FB igual a 1, -1 ou 0

Árvores AVL – Exemplo



B – inserções mantêm árvore balanceada

Un – inserções não mantêm árvore balanceada

Árvores AVL

- Desbalanceamento:

Se NÓ inserido é descendente esquerdo de um nó que tinha FB = -1 (U1 a U8)

OU

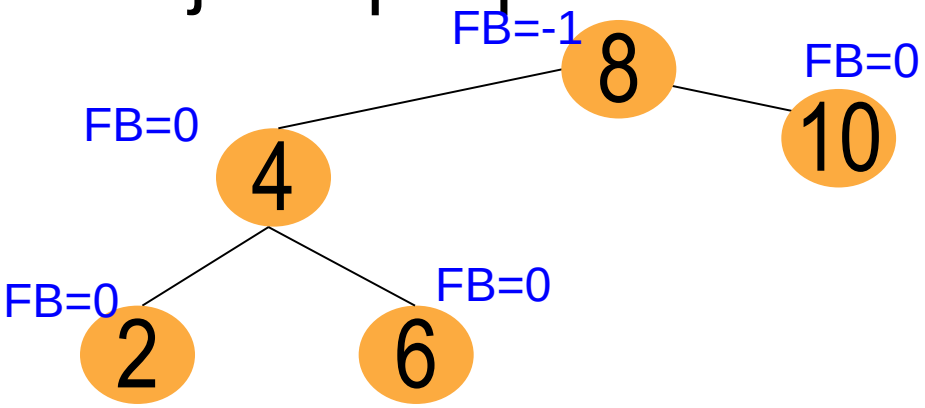
Se NÓ inserido é descendente direito de um nó que tinha FB = 1 (U9 a U12)

Árvores AVL

- Para manter uma árvore balanceada é necessário aplicar uma transformação na árvore tal que:
  1. o percurso in-ordem na árvore transformada seja igual ao da árvore original (isto é, a árvore transformada continua sendo uma ABB);
  2. a árvore transformada fique balanceada (todos os nós com FB= -1, 0 ou 1).

Árvore AVL

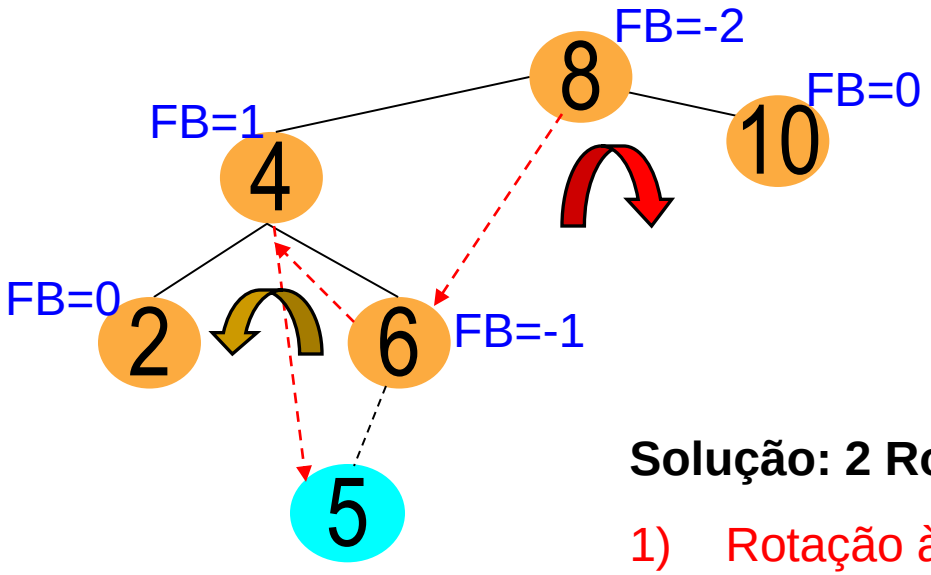
- Numa AVL, a inserção é feita na posição adequada, e depois verifica-se se houve desbalanceamento.
- Veja o que pode acontecer a cada inserção:



- As chaves 9 e 11 não violam o balanceamento (até melhoram!)
- As chaves 1, 3, 5 ou 7 violam.

AVL: 2 Casos de Rebalanceamento

- TIPO 1: a raiz de uma sub-árvore tem FB= 2 (ou –2) e tem um filho com FB = -1 (ou 1), i.e. FB com sinal oposto ao do pai.



Inserção de 5

Como rebalancear?

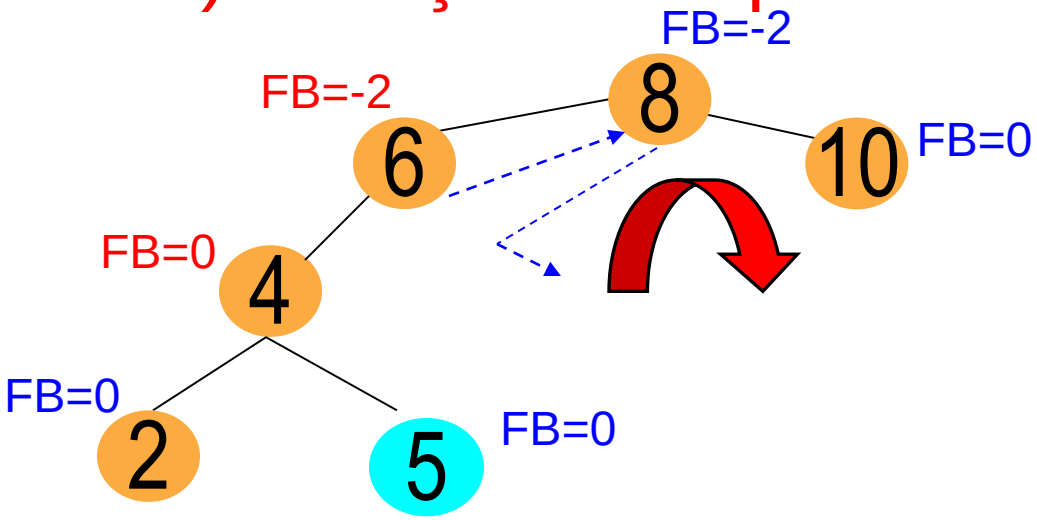
Solução: 2 Rotações:

1) Rotação à esquerda de 4

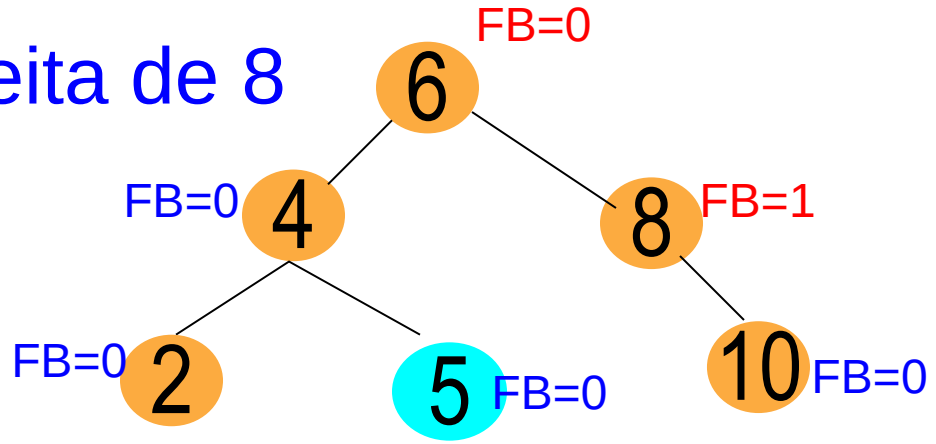
2) Rotação à direita de 8

AVL: Exemplo Rotação Esquerda-Direita

- 1) Rotação à esquerda de 4



- 2) Rotação à direita de 8



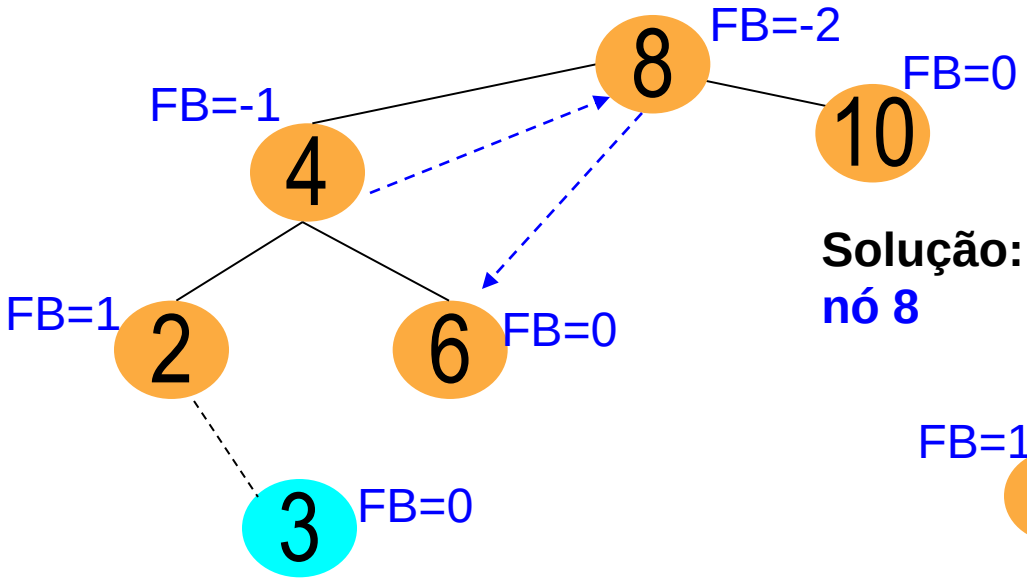
Tipo 1: Resumo

- Requer uma rotação dupla: ESQUERDA-DIREITA ou DIREITA-ESQUERDA:

1. Rotacionar o nó com FB= -1 (ou 1) na direção apropriada, i.e., se FB negativo, para a direita; se positivo, para a esquerda.
2. Rotacionar o nó com FB= -2 (ou 2) na direção oposta.

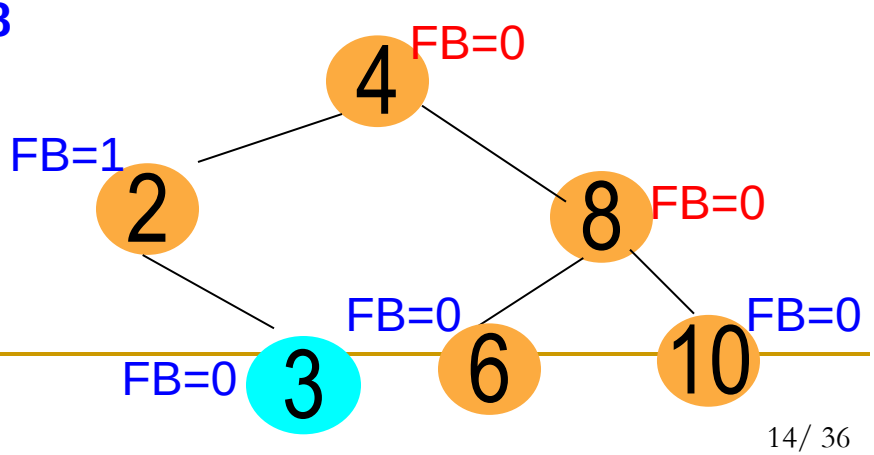
Casos de Rebalanceamento

- Tipo 2: A raiz de uma subárvore tem FB= -2 (ou 2) e tem filho com FB = -1 (ou 1), i.e., com mesmo sinal do pai.



Inserção de 3

Solução: Uma Rotação simples à direita do nó 8



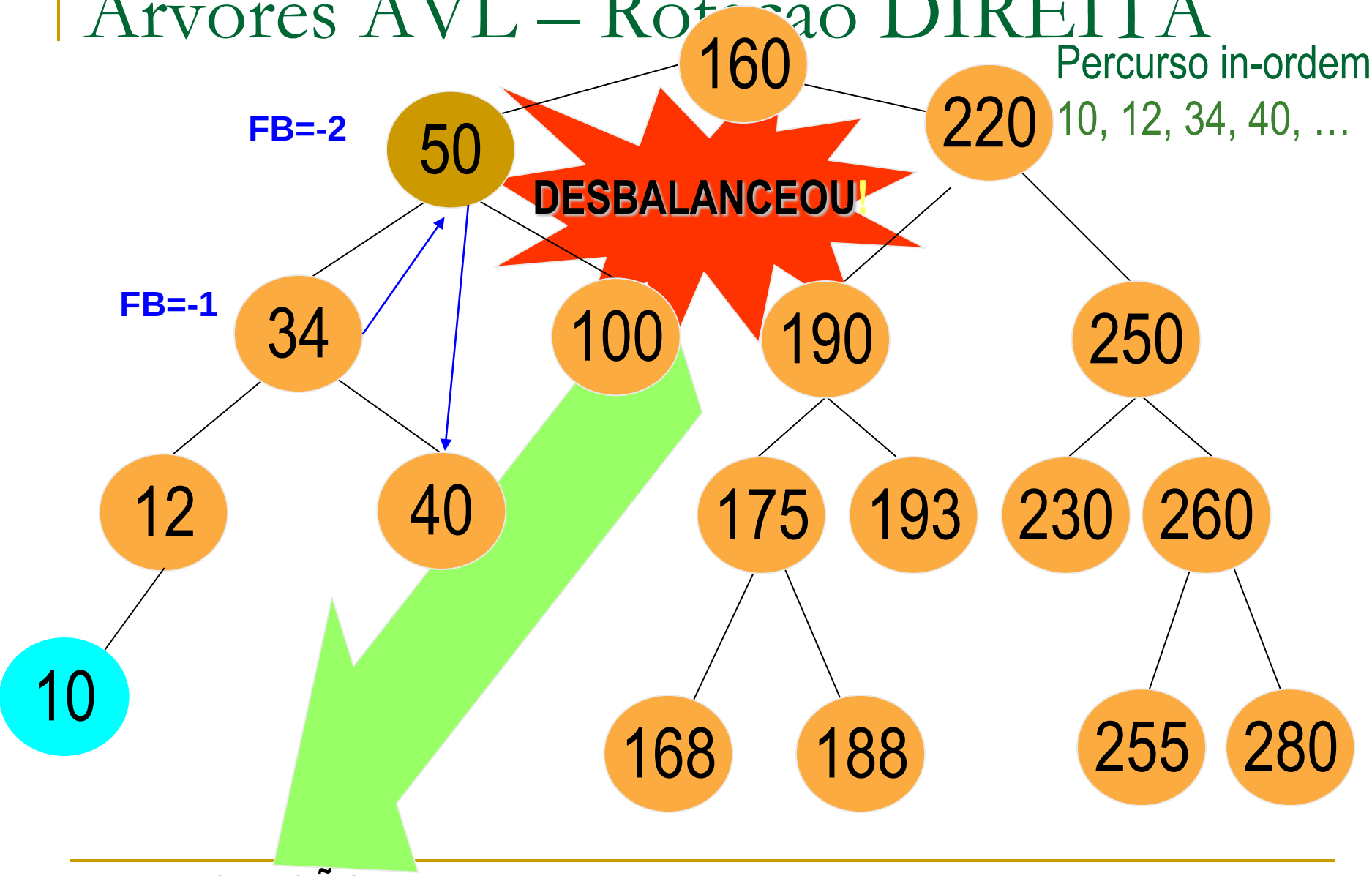
Tipo 2: Resumo

- Rotacionar uma única vez o nó de FB = -2 ou 2:
  - se negativo: à direita;
  - se positivo: à esquerda.

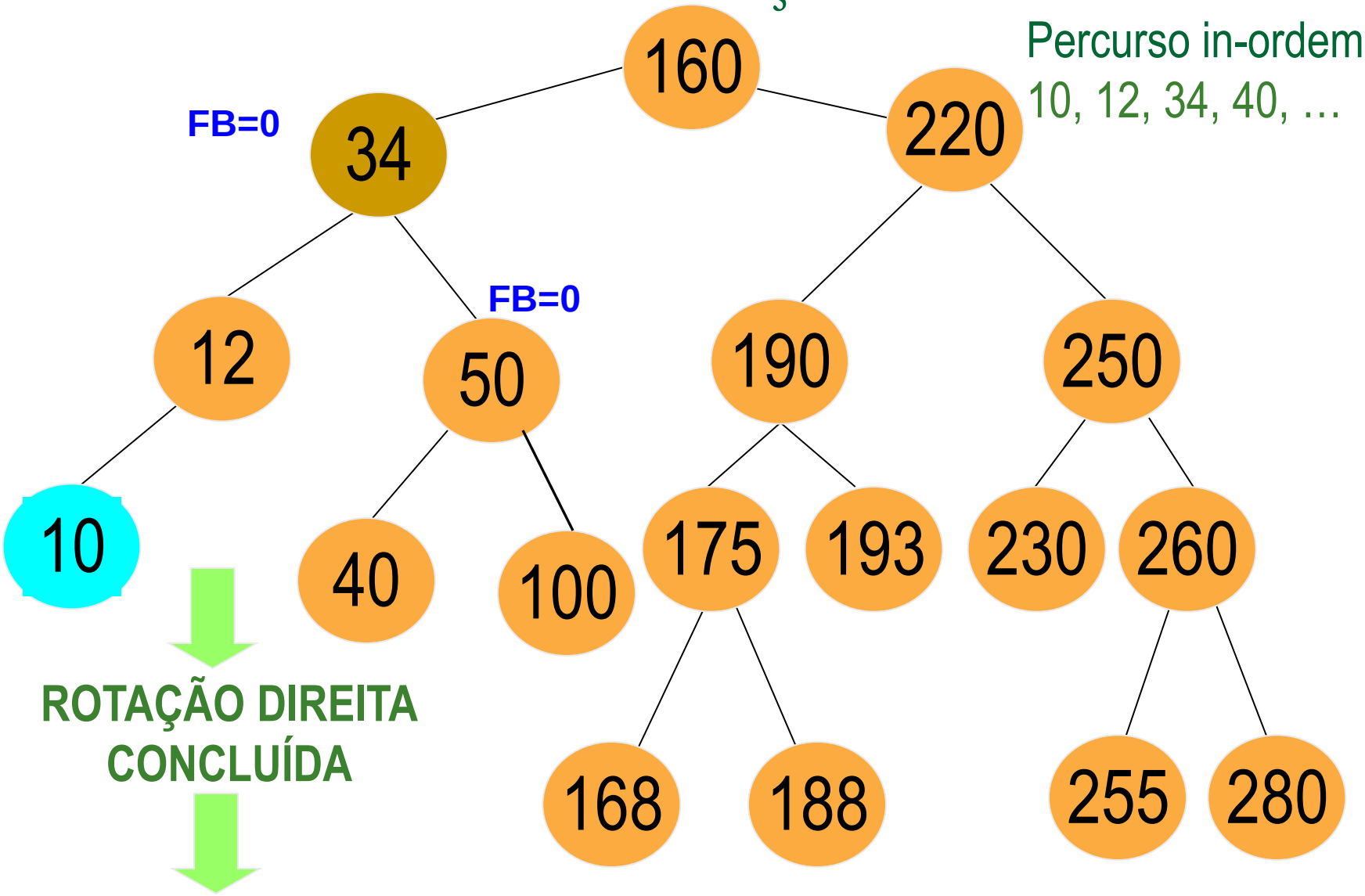
Inserção em AVL: Resumo

- A cada inserção, verificar se balanceamento foi conservado.
- Em caso negativo (se algum nó ficou com FB igual a 2 ou –2), verificar qual caso se aplica (Tipo 1 ou Tipo 2).
- Efetuar as operações de rotação adequadas.

Árvores AVL – Rotação DIREITA

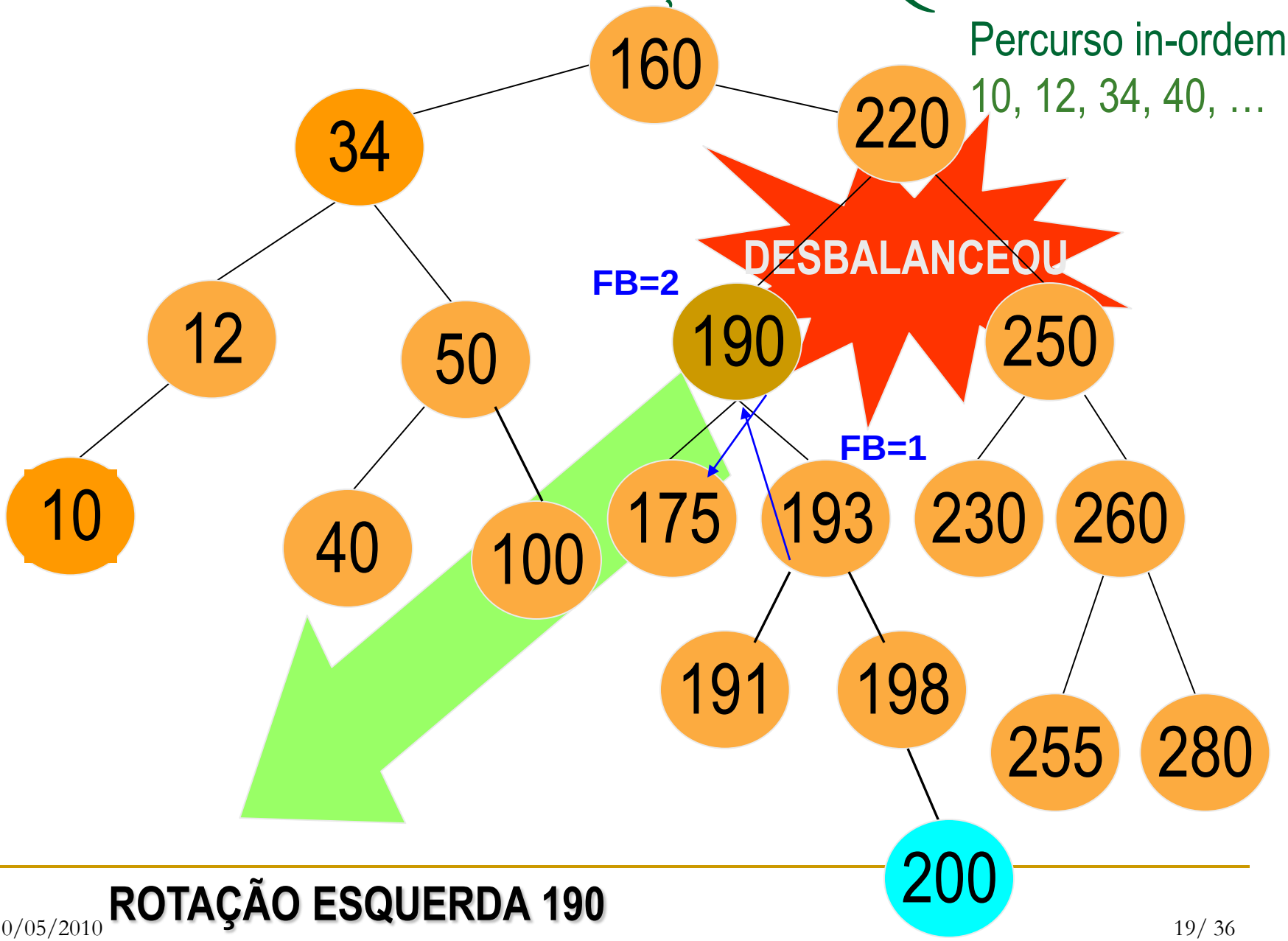


Árvores AVL – Rotação DIREITA



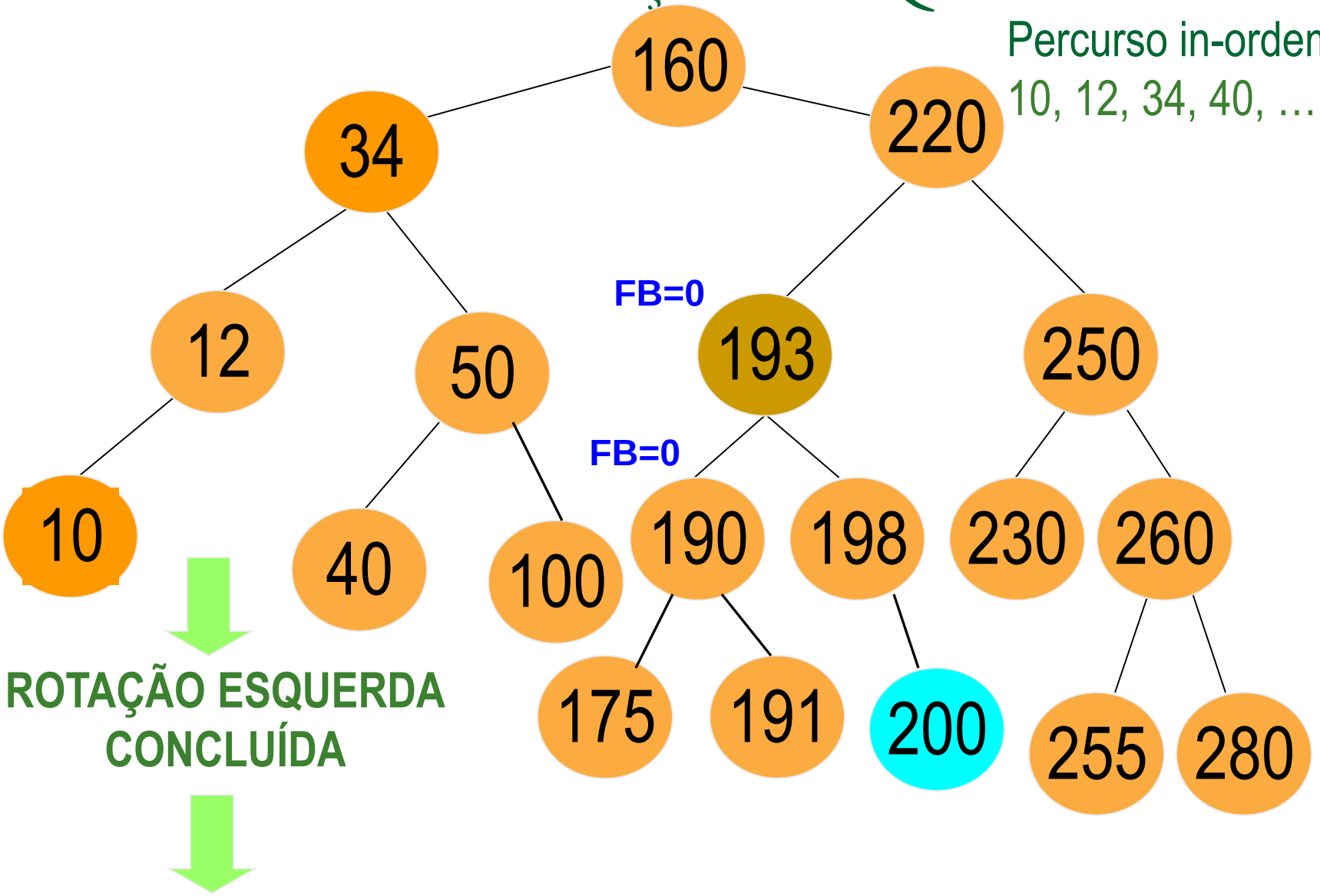
ÁRVORE NOVAMENTE BALANCEADA!!!

Árvores AVL – Rotação ESQUERDA



ROTAÇÃO ESQUERDA 190

Árvores AVL – Rotação ESQUERDA



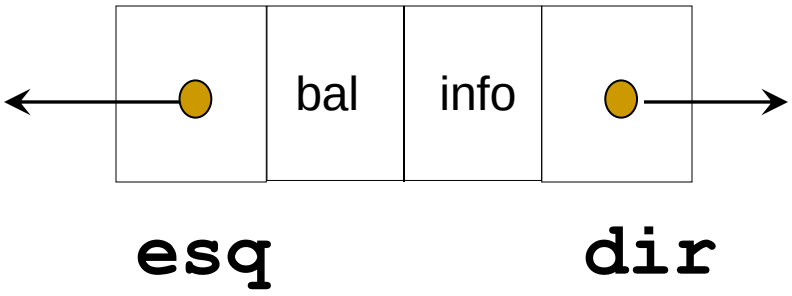
ÁRVORE NOVAMENTE BALANCEADA!!!

Árvores AVL

- Nos exemplos anteriores as regras foram mantidas:
  - o percurso in-ordem na árvore transformada coincide com o da árvore original (a menos do nó inserido), i.e., a árvore transformada é uma ABB;
  - a árvore transformada ficou balanceada

Árvores AVL

- Para verificar qual rotação deve ser efetuada para rebalancear a árvore, é necessário calcular o Fator de Balanceamento do nó (p):
- FB(p) = h(subarv-direita) – h(subarv-esquerda)
  - Se FB positivo: rotações à esquerda
  - Se FB negativo: rotações à direita
- Repare que o efeito das transformações é diminuir em 1 a altura da sub-árvore cuja raiz (p) tem |FB| = 2 após a inserção.
- Isso assegura o rebalanceamento de todos os ancestrais de p, e portanto, o rabalanceamento de toda a árvore.
- Considere um novo campo em cada nó – **bal** – que armazena o FB do nó. Ao ser inserido como folha, o campo bal deve ser inicializado com zero.



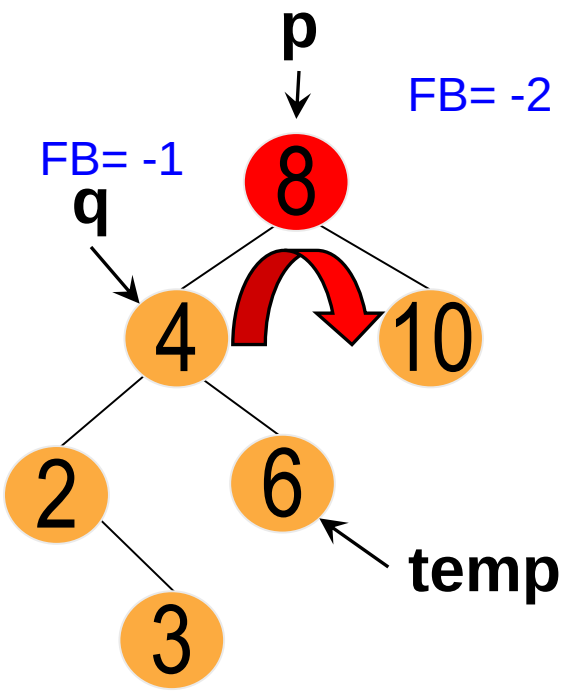

```
typedef struct no *pno;

typedef struct no{
    int bal;
    tipo_elem info;
    pno dir, esq;
}no;

typedef pno tree;
```

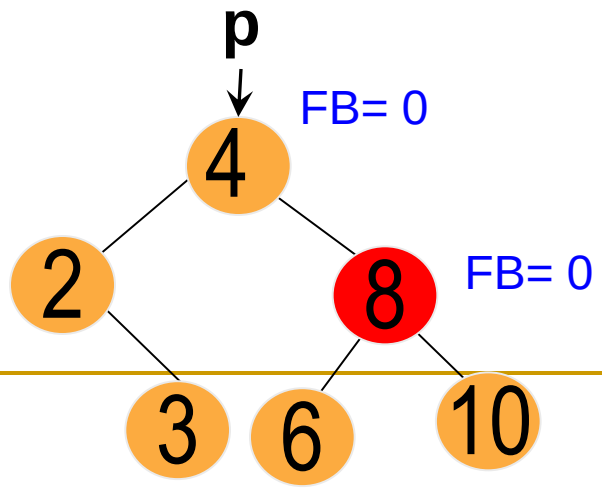
```
tree raiz;
```

Árvores AVL

Algoritmo de Rotação à direita

```
void rot_dir(pno p){
     pno q, temp;

     q = p->esq;
     temp = q->dir;
     q->dir = p;
     p->esq = temp;
     p = q;
}
```

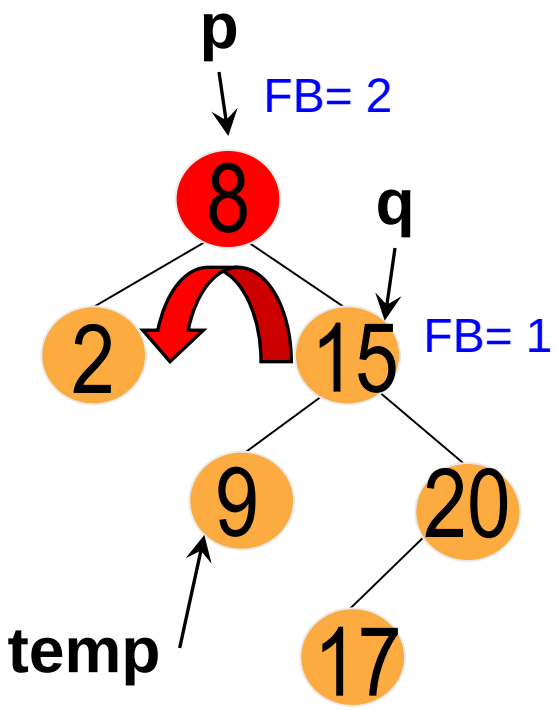


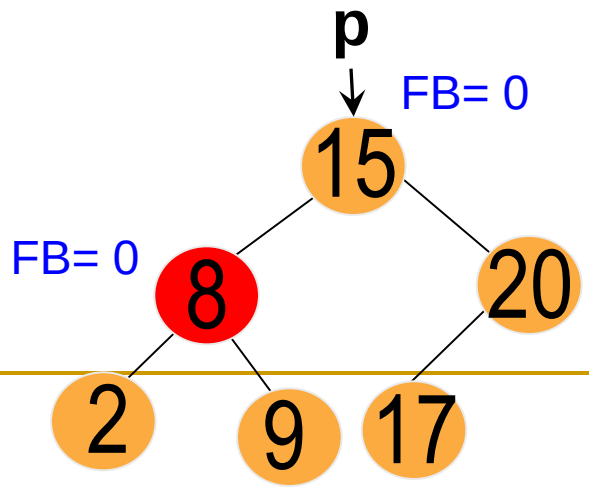


Árvores AVL

Algoritmo de Rotação à esquerda

```
void rot_esq(pno p){
     pno q, temp;

     q = p->dir;
     temp = q->esq;
     q->esq = p;
     p->dir = temp;
     p = q;
}
```

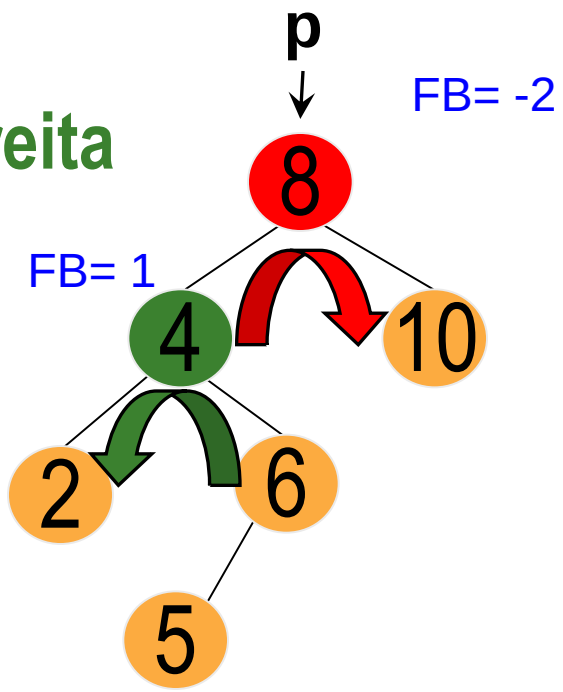


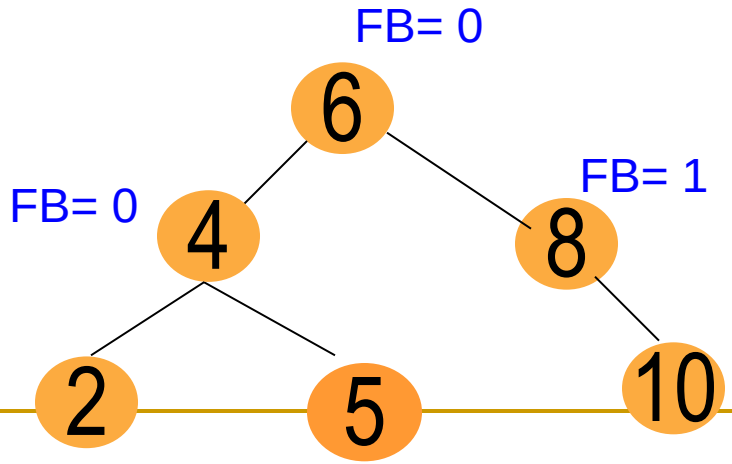


Árvores AVL

Algoritmo de Rotação Esquerda-Direita

```
void rot_esq_dir(pno p){
     rot_esq(p->esq);
     rot_dir(p);
}
```

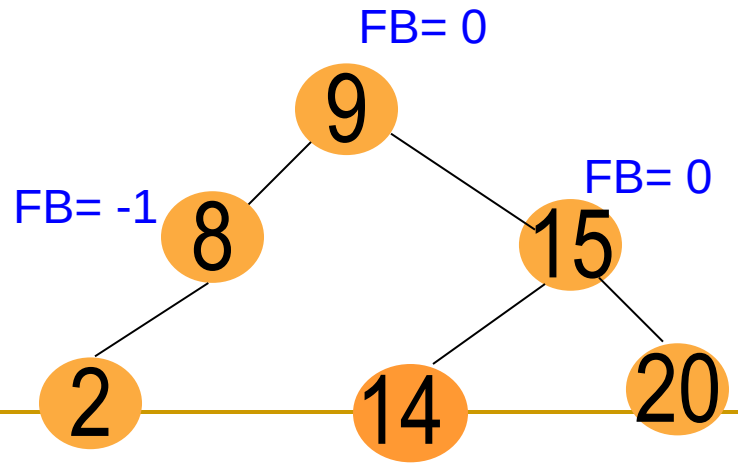


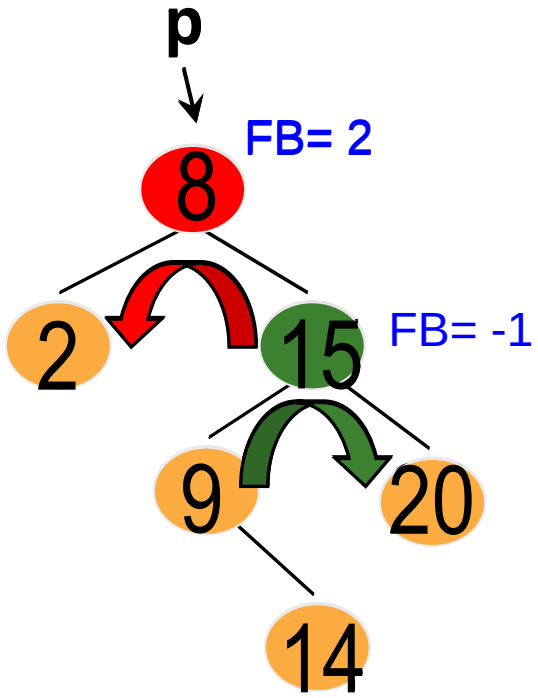


Árvores AVL

Algoritmo de Rotação Direita-Esquerda

```
void rot_dir_esq(pno p){
     rot_dir(p->dir);
     rot_esq(p);
}
```



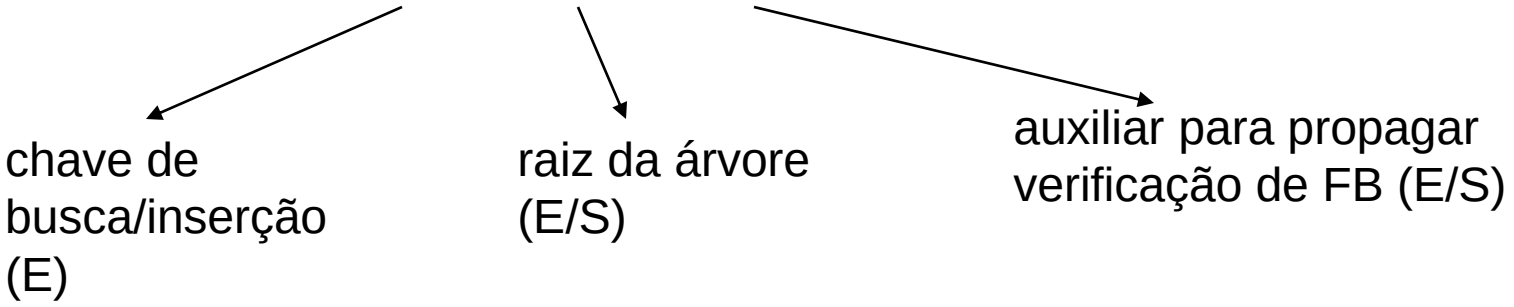


Calculando o FB

- Numa próxima inserção, é preciso verificar o FB dos nós para saber se houve desbalanceamento ou não.
- Assim, a cada inserção e rebalanceamento, é necessário recalcular o valor de FB para os nós envolvidos nas rotações.

Algoritmo **Recursivo** de Busca e Inserção em Árvore AVL

ins_AVL (x, raiz, flag);

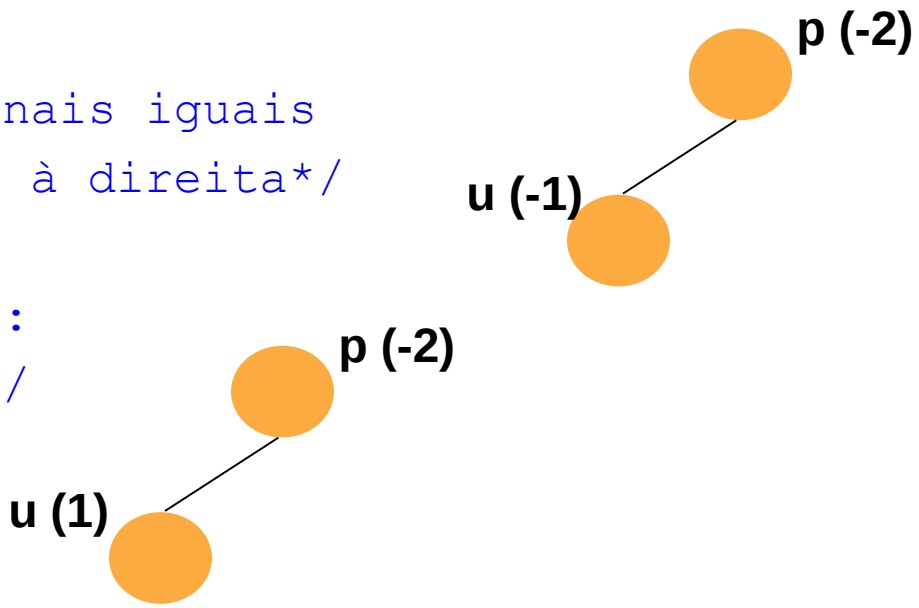


```
void ins_AVL(tipo_elem x, pno p, boolean *flag) {

    if (p == NULL) {
        /*árvore vazia: insere e sinaliza alteração de FB*/
        aloca(p, x); *flag = TRUE;
        return;
    }

    if (x < p->info) { /*recursividade à esquerda*/
        ins_AVL(x, p->esq, flag);
        if (flag) /*inseriu: verificar balanceamento*/
            switch (p->bal) {
                case 1: /*mais alto a direita*/
                    p->bal = 0; /*balanceou com ins. esq*/
                    *flag = FALSE; /*interrompe propagação*/
                    break;
                case 0:
                    p->bal = -1; /*ficou maior à esq.*/
                    break;

                    /* ... */
```

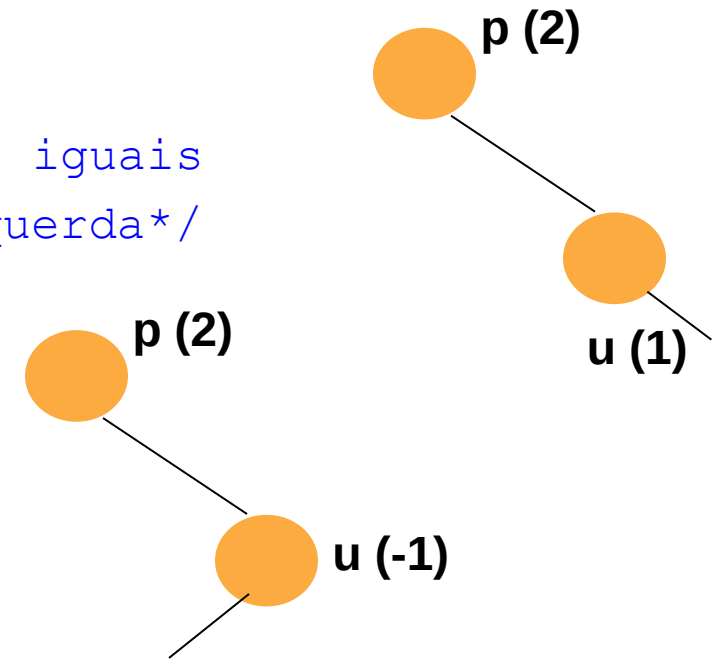
```
                case -1: /*FB(p) = -2*/
                    CASO1(p); /*p retorna balanceado*/
                    *flag = FALSE;  break; /*não propaga mais*/
            }
        return;
    }

    if (x > p->info) { /*recursiva a direita*/
        ins_AVL(x, p->dir, flag);
        if (flag) /*inseriu: verificar balanceamento*/
            switch (p->bal) {
                case -1: /*era mais alto à esq.: zera FB*/
                    p->bal = 0; *flag = FALSE; break;
                case 0: p->bal = 1; break;
                /*direita fica maior: propaga verificação*/
                case 1: /*FB(p) = 2 e p retorna balanceado*/
                    CASO2(p); *flag = FALSE; break;
            }
        return;
    }
    /* else if (x = p->info) - nada a fazer; pare!*/
}
```

```
void aloca (pno p, tipo_elem x){
    /*insere nó p com conteúdo x, como nó folha*/
    p = malloc(sizeof(no));
    p->esq = NULL;
    p->dir = NULL;
    p->info = x;
    p->bal = 0;
}
```

```
void CASO1 (pno p){
    /*x foi inserido à esq. de p e causou FB= -2*/
    pno u;

    u = p->esq;
    if (u->bal == -1) /*caso sinais iguais
            e negativos: rotação à direita*/
        rot_dir(p);
    else /*caso sinais trocados:
            rotação dupla u + p*/
        rot_esq_dir(p);

    p->bal = 0;
}
```



```
void CASO2 (pno p){
    /*x foi inserido à direta de p e causou FB=2*/
    pno u;

    u = p->dir;
    if (u->bal == 1) /*caso sinais iguais
        e positivos: rotação à esquerda*/
        rot_esq(p);
    else /*caso sinais trocados:
          rotação dupla u + p*/
        rot_dir_esq(p);

    p->bal = 0;
}
```

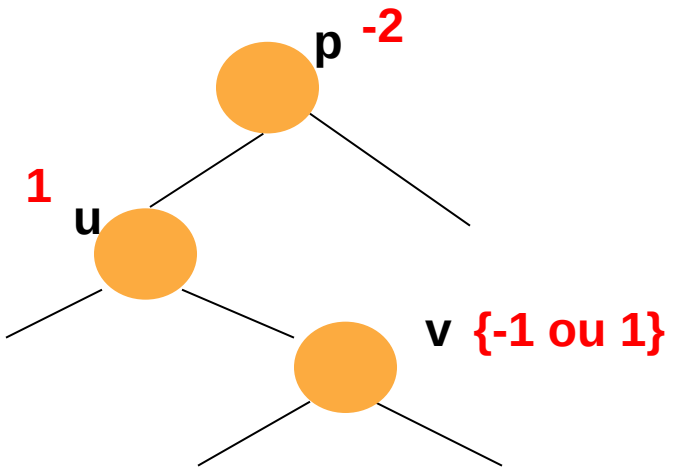


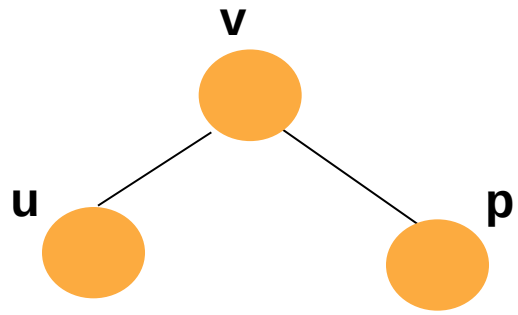
Refazendo as rotações duplas para ajustar FB

```
void rot_esq_dir(pno p){

    pno u, v;

    u = p->esq; v = u->dir;
    u->dir = v->esq;
    v->esq = u;
    p->esq = v;
    v->dir = p;

    /*atualizar FB de u e p em função de FB de v - a nova raiz*/
    if (v->bal == -1) {  /*antes: u^.bal=1 e p^.bal=-2*/
        u->bal = 0;
        p->bal = 1;
    } else {
        p->bal =0;
        u->bal = -1;
    }
    p = v;
}
```

rot_esq(u)

rot_dir(p)



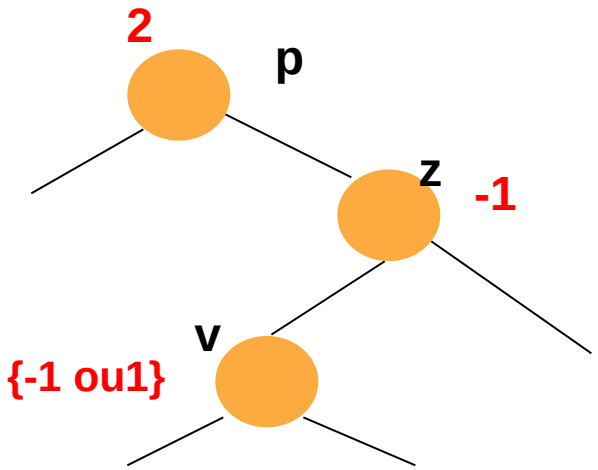


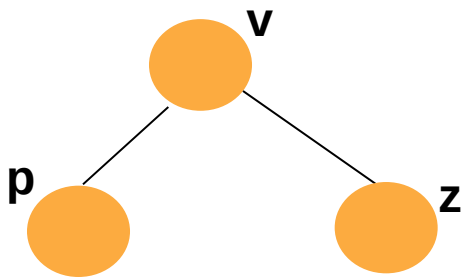
Refazendo as rotações duplas para ajustar FB

```
void rot_dir_esq(pno p){

    pno z, v;

    z = p->dir; v = z->esq;
    z->esq = v->dir;
    v->dir = z;
    p->dir = v->esq;
    v->esq = p;

    /*atualizar FB de z e p em função de FB de v - a nova raiz*/
    if (v->bal == 1) {
        p->bal = -1;
                z->bal = 0;
    } else {
        p->bal = 0;
        z->bal = 1;
    }
    p = v;
}
```

rot_dir(z)

rot_esq(p)





Eliminação em AVL

- Operações análogas à da ABB, porém, como podem desbalancear a árvore, requerem a verificação dos valores de Fatores de Balanceamento e acionamento das rotações adequadas, quando for o caso.

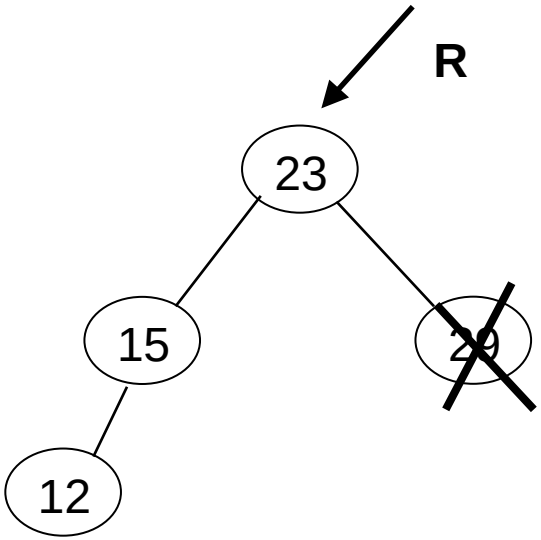
AVL

- Como fazer a remoção de elementos da AVL?

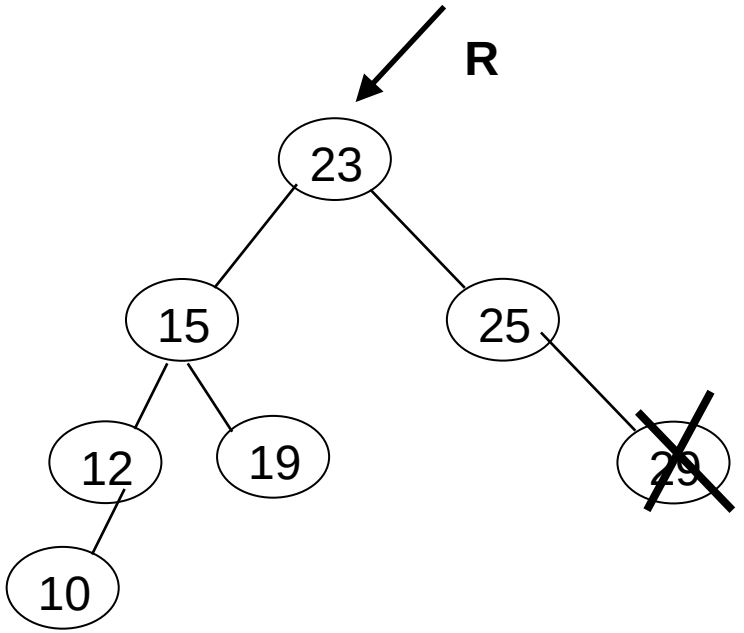
  Tentar pensar no caso oposto: quando se remove um elemento, é como se um elemento tivesse sido inserido

AVL: remoção

- Exemplos



remoção de 29 = inserção de 12

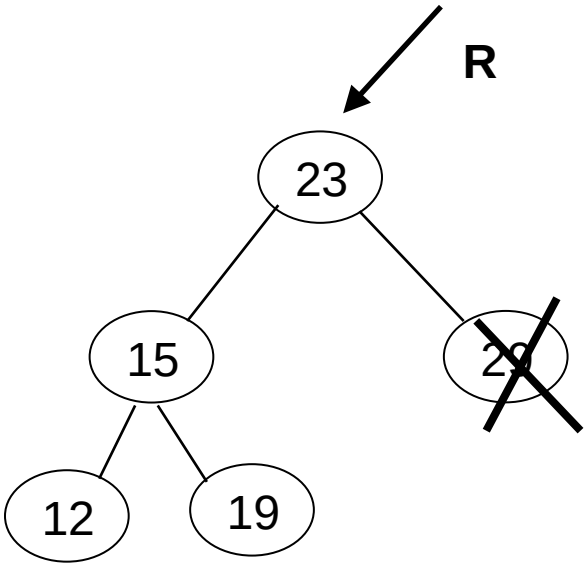


remoção de 29 = inserção de 10

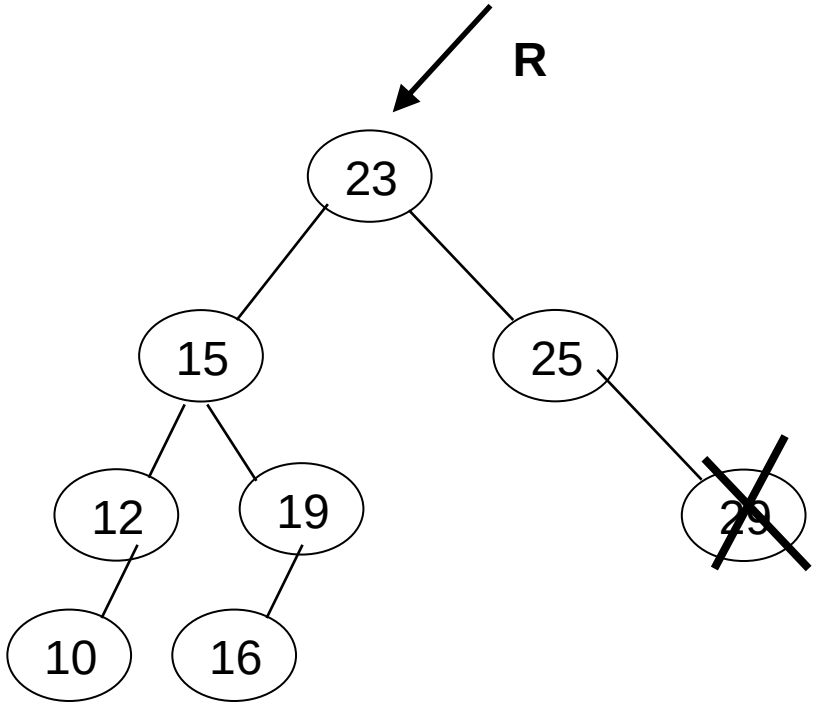
Como balancear?

AVL: remoção

- Exemplos



remoção de 29 = inserção de 12 ou19



remoção de 29 = inserção de 10 ou16

Como balancear?

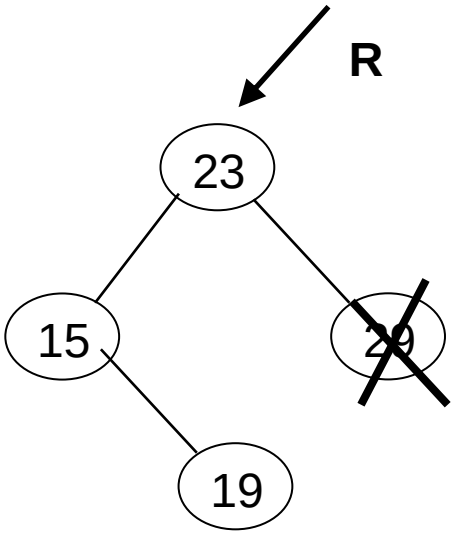
Rotação simples em R

AVL: remoção

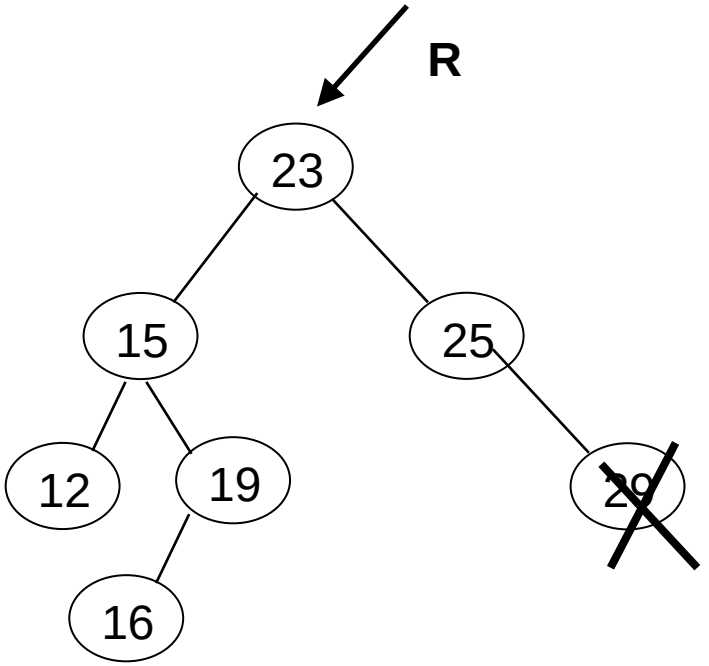
- Primeiro caso
  - Rotação simples em R (FB=2 ou -2) com filho com fator de balanceamento de mesmo sinal (1 ou -1) ou zero
    - Se R negativo, rotaciona-se para a direita; caso contrário, para a esquerda

AVL: remoção

- Exemplos



remoção de 29 = inserção de 19

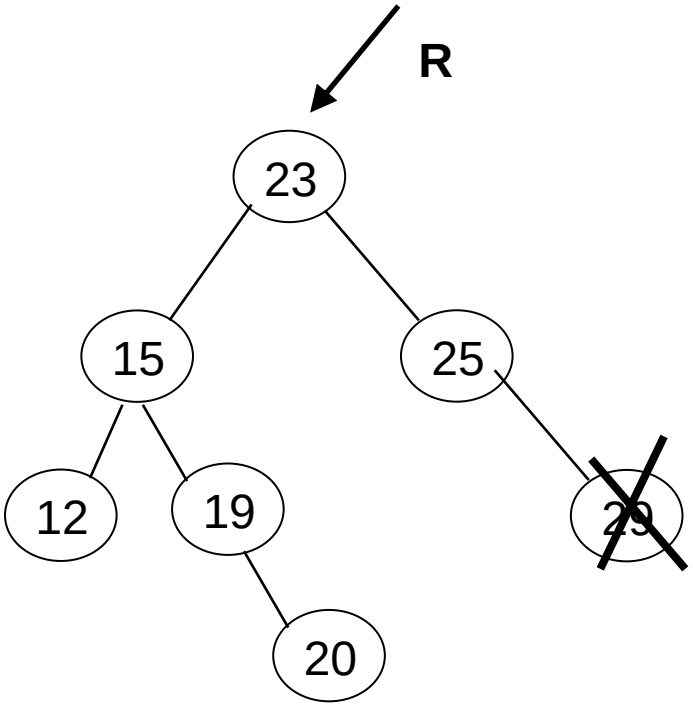


remoção de 29 = inserção de 16

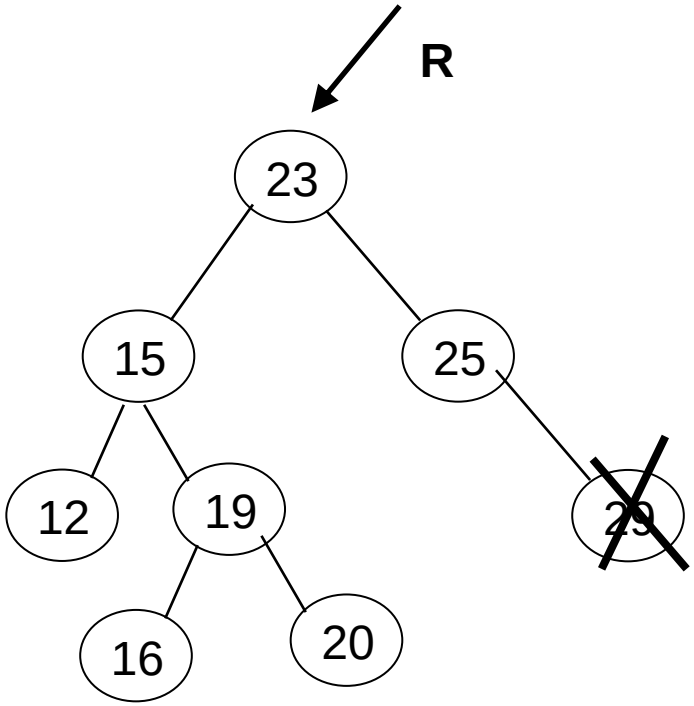
Como balancear?

AVL: remoção

- Exemplos



remoção de 29 = inserção de 20



remoção de 29 = inserção de 16 ou 20

Como balancear?

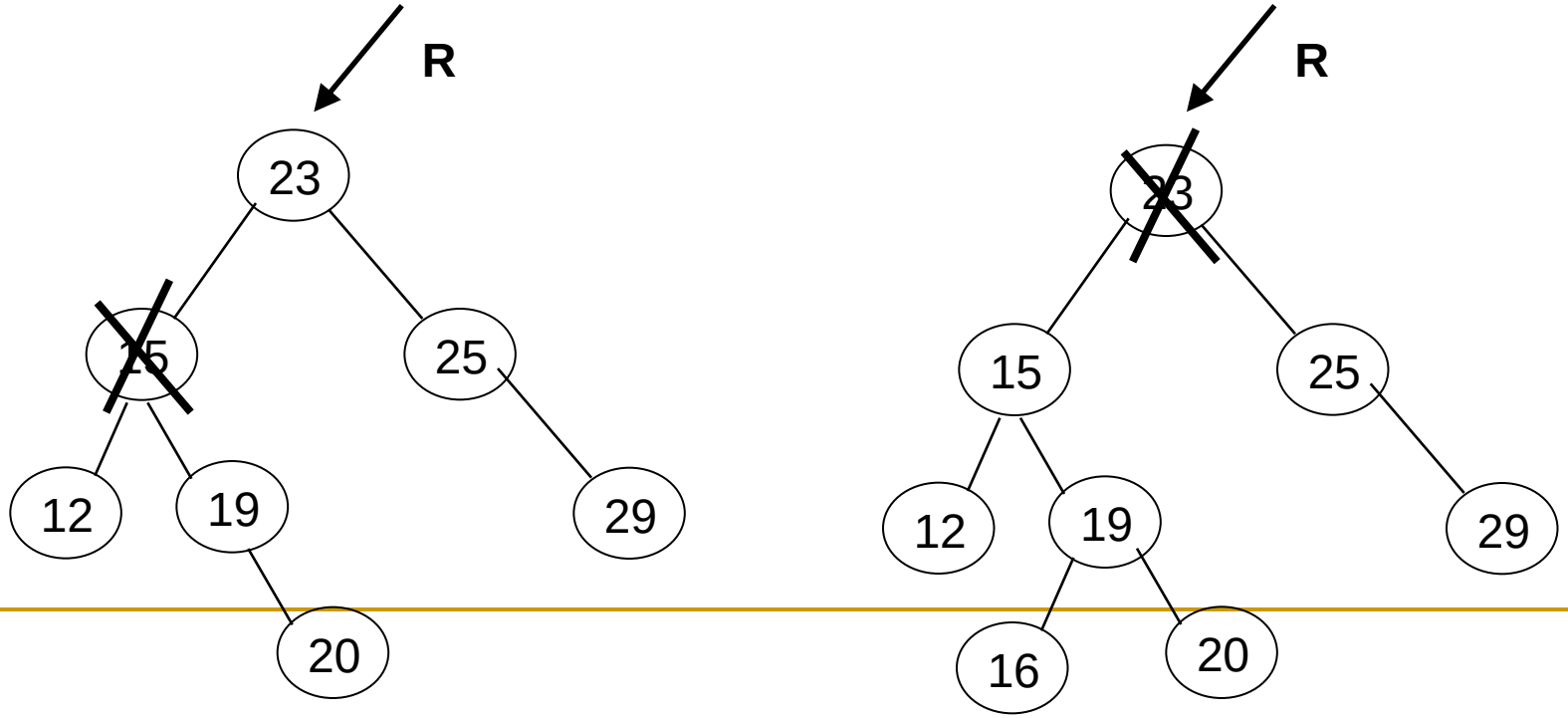
Rotação dupla: filho de R e R

AVL: remoção

- Segundo caso
  - Rotação dupla quando R (FB=2 ou -2) e seu filho (1 ou -1) tem fatores de balanceamento com sinais opostos
    - Rotaciona-se o filho para o lado do desbalanceamento do pai
    - Rotaciona-se R para o lado oposto do desbalanceamento

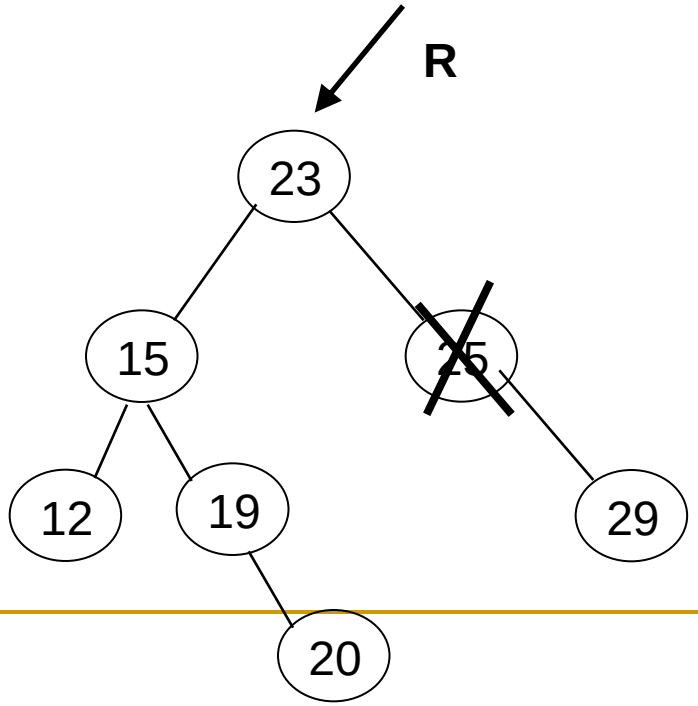
AVL: remoção

- Questão: como remover um nó intermediário em vez de um nó folha?
  - É necessário balancear?



AVL: remoção

- Questão: como remover um nó intermediário em vez de um nó folha?
  - É necessário balancear?



AVL

- Exercício para casa
  - Implementar sub-rotina de remoção de elemento de uma AVL