## $3^a$ Lista de Exercícios de SMA332 - Cálculo II

*Professor: Thais Jordão e Wagner Vieira Leite Nunes* *17.02.2014*

---

**Exercício 1** *Encontre o maior subconjunto de* $I \subseteq \mathbb{R}$ *para os quais as curvas parametrizadas* $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *abaixo sejam diferenciáveis. Encontre as equações paramétricas da curva e o vetor tangente à curva nos instantes* $t \in I$.

a) $\gamma(t) \doteq (\cos(t), t)$

b) $\gamma(t) \doteq \left(\cos\left(t^2 - 1\right), e^{t^3+2t-1}, \operatorname{senh}\left(t^3 - t^2 + 1\right)\right)$

c) $\gamma(t) = \left(t^2, t^3\right)$

d) $\gamma(t) \doteq \left(\cosh\left(t^3 + t^2\right), 3t^3 - 4t + 15, \operatorname{sen}\left(t^3 + t^2 + t + 1\right)\right)$

e) $\gamma(t) \doteq (\operatorname{sen}(t), \cos(t))$

**Exercício 2** *Encontre o maior subconjunto de* $\mathbb{R}$ *para os quais as curvas parametrizadas do Exercício 1 são curvas parametrizadas regulares.*

**Exercício 3** *Ache o comprimento da curva regular* $\gamma$*, em cada um dos itens abaixo:*

a) $\gamma : \begin{cases} x = 5t \\ y = 4t^2 \\ z = 3t^2 \end{cases}, \ t \in [0, 2]$

b) $\gamma : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t\operatorname{sen}(t) \\ z = t\cos(t) \end{cases}, \ t \in [0, 1]$

c) $\gamma : \begin{cases} x = 2t \\ y = 4\operatorname{sen}(3t) \\ z = 4\cos(3t) \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi]$

d) $\gamma : \begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = 4t \\ z = 3 + 2t^2 \end{cases}, \ t \in [0, 2]$

e) $\gamma(t) \doteq e^t \cdot \vec{e}_1 + t\operatorname{sen}(t) \cdot \vec{e}_2 + t\cos(t) \cdot \vec{e}_3, \ t \in [0, 1]$

f) $\gamma(t) \doteq 3t^2 \cdot \vec{e}_1 + t^3 \cdot \vec{e}_2 + 6t \cdot \vec{e}_3, \ t \in [0, 1]$

**Exercício 4** *Uma* <u>**concho-espiral**</u> *é uma curva parametrizada regular* $\gamma : [0, \infty) \to \mathbb{R}^3$*, contida no espaço, que admite uma parametrização do tipo* $\begin{cases} x = ae^{wt}\cos(t) \\ y = ae^{wt}\operatorname{sen}(t) \\ z = be^{wt} \end{cases}, \ t \in [0, \infty)$*, onde* $a, b, w$ *são constantes fixadas.*

a) *Mostre que a curva* $\gamma$ *está contida no cone* $a^2z^2 = b^2\left(x^2 + y^2\right)$.

b) *Trace o gráfico de* $\gamma$ *quando* $a = b = 4$ *e* $w = -1$.

c) *Ache o comprimento de* $\gamma$ *correspondente ao intervalo* $[0, \infty)$.

**Exercício 5** *Considere a curva parametrizada* $\gamma : [0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ *dada por* $\gamma : \begin{cases} x = a\operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(\alpha) \\ y = b\operatorname{sen}(t)\cos(\alpha) \\ z = c\cos(t) \end{cases}$, $t \in [0, \infty)$*, onde* $a, b, c$ *e* $\alpha$ *são constantes fixadas.*

a) *Mostre que a curva* $\gamma$ *está contida no elipsóide* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

b) *Mostre que a curva* $\gamma$ *está contida em um plano que contém o eixo-z.*

c) *Faça um esboço do gráfico do traço da curva* $\gamma$.

**Exercício 6** *Encontre as equações paramétricas da reta tangente à curva parametrizada* $\gamma : I \doteq [0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ *no ponto* $P \in \gamma(I)$, *nos seguintes casos:*

a) $\gamma : \begin{cases} x = 2t^3 - 1 \\ y = -5t^2 + 3 \\ z = 8t + 2, \ t \in I, \ P = (1, -2, 10) \end{cases}$

b) $\gamma : \begin{cases} x = e^t \\ y = te^t \\ z = t^2 + 4, \ t \in I, \ P = (1, 0, 4) \end{cases}$

c) $\gamma(t) \doteq e^t \cdot \vec{e}_1 + t\,\text{sen}(t) \cdot \vec{e}_2 + t\cos(t) \cdot \vec{e}_3$, $t \in I$, $P = (1, 0, 0)$

d) $\gamma(t) \doteq 3t^2 \cdot \vec{e}_1 + t^3 \cdot \vec{e}_2 + 6t \cdot \vec{e}_3$, $t \in I$, $P = (3, 1, 6)$

**Exercício 7** *Uma* **hélice** *é uma curva parametrizada regular cujo vetor tangente em cada ponto faz ângulo constante com um vetor uniário* $\vec{u}$. *Mostre que a curva parametrizada por* $\gamma : \begin{cases} x = 3t - t^3 \\ y = 3t^2 \\ z = 3t + t^3, \ t \in R \end{cases}$ *é uma hélice, determinando um vetor apropriado* $\vec{u}$.

**Exercício 8** *Um ponto move-se sobre uma curva regular* $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *de modo que o vetor posição e*$\gamma(t)$ *e o vetor tangente* $\gamma'(t)$ *sejam ortogonais. Mostre que, neste caso, o traço da curva parametrizada* $\gamma$ *está sobre uma esfera de centro na origem. Sugestão: mostre que* $\|\gamma(t)\|^2 = \text{constante}$, *para todo* $t \in I$ *calculando sua derivada em relação a* $t$.

**Exercício 9** *Suponhamos que uma curva parametrizada regular* $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *tem vetor tangente* $\vec{u} = \gamma'(t_o)$ *em* $t_o \in I$ *e seja* $P = \gamma(t_o)$. *Então definimos o* **plano normal** *à curva parametrizada* $\gamma$ *em* $t_o$ *como sendo o plano que contém o ponto* $P$ *e é um plano normal ao vetor* $\vec{u}$.

*Encontre a equação do plano normal à curva parametrizada regular* $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *no instante* $t_o$, *nos seguintes casos:*

a) $\gamma : \begin{cases} x = e^t \\ y = te^t \\ z = t^2 + 4 \end{cases}, \ t_o = 0$

b) $\gamma : \begin{cases} x = t\,\text{sen}(t) \\ y = t\cos(t) \\ z = t \end{cases}, \ t_o = \dfrac{\pi}{2}$

c) $\gamma(t) \doteq e^t \cdot \vec{e}_1 + t\,\text{sen}(t) \cdot \vec{e}_2 + t\cos(t) \cdot \vec{e}_3$, $t_o = 0$

**Exercício 10** *Um jogador de futebol lança uma bola a uma distância de* 30 *metros. Se a bola é liberada a um ângulo de* $\dfrac{\pi}{4}$ *radianos com a horizontal, encontre sua velocidade inicial.*

**Exercício 11** *Um projétil é lançado horizontalmente de uma altura de* 300 *metros acima do solo a uma velocidade de* $550\,\text{m/s}$. *Quando ele atingirá o solo?*