8.a Lista de Exercícios de SMA304 - Álgebra Linear

Exercício 1. No espaço vetorial real $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ consideremos o produto interno $\langle f(t), g(t)\rangle \doteq \int_0^1 f(t)g(t)dt$, onde $f, g \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$. Calcule $\langle f(t), g(t)\rangle$, $\|f(t)\|$, $\|g(t)\|$ e $\|f(t)+g(t)\|$ para os seguinte casos:
(a) $f(t) = t^3 - t - 1$ e $g(t) = t^2 + 1$, para $t \in \mathbb{R}$.
(b) $f(t) = 2$ e $g(t) = t^3 + t + 1$, para $t \in \mathbb{R}$.

Exercício 2. No espaço vetorial real $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ considere $< f, g > \doteq a_0b_0 + a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$, onde $f, g \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$, são dados por $f(t) \doteq a_0 + a_1t + \ldots + a_nt^n$ e $g(t) \doteq b_0 + b_1t + \ldots + b_nt^n$, $t \in \mathbb{R}$. A função $< \cdot, \cdot >$ é um produto interno no espaço vetorial real $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$? Justifique sua resposta.

Exercício 3.
(a) No espaço vetorial real $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ considere o produto interno $\langle A, B\rangle \doteq tr(B^tA)$, $A, B \in M_2(\mathbb{R})$. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, calcule: $\langle A, B\rangle$, $\|A\|$, $\|B\|$ e $d(A, B)$.
(b) Encontre uma base ortonormal de $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ segundo o produto interno acima.

Exercício 4. Considere o espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$ munido de um produto interno $< \cdot, \cdot >$. Se $u, v \in V$ são tais que $\|u\| = 5$, $\|v\| = 8$ e $\|u + v\| = \sqrt{129}$, determine o cosseno do ângulo entre os vetores u e v.

Exercício 5. Considere $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ um espaço vetorial real munido de um produto interno $< \cdot, \cdot >$ usual. Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ para demonstrar que, dados números reais estritamente positivos a_1, a_2, a_3, vale a desigualdade:

$$(a_1 + a_2 + a_3)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right) \geq 9.$$

Exercício 6. Considere $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial real munido de um produto interno $< \cdot, \cdot >$. Encontrar a distância entre u e v e o cosseno do ângulo entre eles nos seguintes casos:
(a) $V \doteq \mathbb{R}^4$, $< \cdot, \cdot >$ produto interno usual em $\mathbb{R}^4$, $u = (1, 1, 1)$ e $v = (-1, 0, 1, -1)$.
(b) $V \doteq \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $< \cdot, \cdot >$ do Exercício 1., $u(t) = 1 + t - t^2$ e $v(t) = 3t^2$, para $t \in \mathbb{R}$.
(c) $V \doteq M_2(\mathbb{R})$, $< \cdot, \cdot >$ produto interno do Exercício 3., $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercício 7. Considere o espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ munido de um produto interno $< \cdot, \cdot >$ usual. Determinar todos os vetores do $\mathbb{R}^3$ de norma igual a dois, que sejam ortogonais simultaneamente a $(2, 1, 2)$ e $(-1, 3, 4)$.

Exercício 8. No espaço vetorial real $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ consideremos o produto interno $\langle f(t), g(t)\rangle \doteq \int_0^1 f(t)g(t)dt$, onde $f, g \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$. Provar que os vetores $p_o, p_1, p_2 \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, onde $p_o(t) = 1$, $p_1(t) \doteq t$ e $p_2(t) \doteq t^2 - \frac{1}{3}$, $t \in \mathbb{R}$, são dois a dois ortogonais em relação do produto interno dado por $\langle f(t), g(t)\rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$.

Exercício 9. Considere o espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ munido de um produto interno $< \cdot, \cdot >$ usual. Sejam $u \doteq (2, 2, 2), v \doteq (3, 3, 1) \in \mathbb{R}^3$.
(a) Determine dois vetores v_1 e v_2 tais o vetor que $v = v_1 + v_2$, v_1 é ortogonal aos vetores u e $v_2 = \lambda \cdot u$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
(b) Se $w \doteq (-5, 1, -1)$ decompor o vetor v em uma parcela que pertença ao subespaço vetorial $W = [u, w]$ e uma outra parcela que pertença ao subespaço vetorial $W^\perp$.
(c) Determinar uma base ortonormal do subespaço vetorial W.

Exercício 10. Considere o espaço vetorial real $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ munido de um produto interno $< \cdot, \cdot >$ usual. Determinar a projeção ortogonal do vetor $u \doteq (1, 1, 0, -1) \in \mathbb{R}^4$ sobre o subespaço $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,;\, x - y - z = 0$ e $z - 2t = 0\}$.

Exercício 11. Considere o espaço vetorial real $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ com o produto interno do Exercício 8. .
(a) Ortonormalizar a base $\{q_o, q_1, q_2\}$ de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, onde $q_o(t) \doteq 1$, $q_1(t) \doteq 1 + t$ e $q_2(t) \doteq 2t^2$, para $t \in \mathbb{R}$.
(b) Achar o complemento ortogonal do subespaço $W \doteq [r_o, r_1]$ onde $r_o(t) \doteq 5$ e $r_1(t) \doteq 1 + t$, para $t \in \mathbb{R}$.

Exercício 12. Considere o espaço vetorial real $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ l munido de um produto interno $< \cdot, \cdot >$ usual. Determinar uma base ortonormal de cada um dos seguintes subespaços do $\mathbb{R}^4$ utilizando o processo de Gram-Schmidt:

(a) $W \doteq (1,1,0,0), (0,1,2,0), (0,0,3,4)]$.

(b) $W \doteq [(2,0,0,0), (1,3,3,0), (3,-3,-3,0)]$.

13. Considere $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ um espaço vetorial real munido de um produto interno $< \cdot, \cdot >$ usual. Seja $\mathcal{C} = \left\{ \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}_{\doteq u_1}, \underbrace{\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)}_{\doteq u_2}, \underbrace{\left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)}_{\doteq u_3} \right\}$ uma base ortonormal do espaço euclideano considerado.

(a) Encontre a matriz das coordenadas do $v = (1,7,8)$ relativamente à base $\mathcal{C}$.

(b) Encontre a projeção ortogonal do vetor v sobre o subespaço vetorial $W \doteq [u_1, u_2]$.

(b) Sejam $u, w \in \mathbb{R}^3$ tais que $[u]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $[w]_{\mathcal{C}} \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Encontre $||u||, ||v||$ e o ângulo entre os vetores u e v.

(c) Calcule $||u+v||$.

(d) Calcule $||u_1 + u_2 + u_3||$.

Exercício 13. Considere o espaço vetorial real $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ munido de um produto interno $< \cdot, \cdot >$ usual. Verfique quais dos operadores lineares $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ abaixo são isometrias de $\mathbb{R}^2$:

(a) $T(x,y) \doteq (x+y, x-y)$, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) $T(x,y) \doteq \left(\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{y}{2}\right)$, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) $T(x,y) = (y,x)$, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercício 14. Considere o espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ munido de um produto interno $< \cdot, \cdot >$ usual. Determine $m \in \mathbb{R}$ de modo que o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por:

$$T(x,y,z) \doteq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,x + \frac{1}{\sqrt{3}}\,y + mz, -\frac{1}{\sqrt{6}}\,x + \frac{2}{\sqrt{6}}\,y - \frac{1}{\sqrt{6}}\,z, -\frac{1}{\sqrt{2}}\,x + \frac{1}{\sqrt{2}}\,z\right), \quad \text{para} \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

seja uma isometria de $\mathbb{R}^3$.

Exercício 15. Considere o espaço vetorial real $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ com o produto interno do Exercício 8. .

(a) Ortonormalize a base usual, $\{p_o, p_1, p_2\}$ de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$.

(b) Considere o operador linear $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R} \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ cuja matriz em relação a base $\mathcal{C}$ encontrada no item anterior seja $[T]_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ m & n & p \end{pmatrix}$. Determine m, n, p de modo que o operador linear T seja uma isometria no espaço euclideano considerado.

Exercício 16. Considere espaço vetorial real $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$. munido do produto interno do Exercício 3. .

Mostre que $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dado por $T(A) = A^t$, para $A \in M_2(\mathbb{R})$ é uma isometria no espaço euclideano considerado.

Exercício 17. Considere espaço vetorial real $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$. munido do produto interno do Exercício 3. e o espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ munido de um produto interno $< \cdot, \cdot >$ usual. Construa uma isometria entre estes espaços euclideanos.

19. Seja $(V, +, \cdot)$ espaço veotirla munido de um produto interno $< \cdot, \cdot >$. Verifique se os operadores abaixo são auto-adjuntos:

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $< \cdot, \cdot >$ o produto interno usual e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x,y,z) \doteq (y+2z, x+3z, 2x+3y)$, para $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(b) $V = \mathscr{P}_1(\mathbb{R})$, $< \cdot, \cdot >$ o produto interno do Exercício 8. e $T : \mathscr{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_1(\mathbb{R})$ dado por $T(p) = q$, para $p \in \mathscr{P}_1(\mathbb{R})$, onde $p(t) \doteq a + bt$ e $q(t) \doteq (a+4b) + (4a+2b)t$, para $t \in \mathbb{R}$.

(c) $V = M_2(\mathbb{R})$, $< \cdot, \cdot >$ o produto interno do Exercício 3. e $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ tal que $T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \doteq \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \doteq \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right)$ e $T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.