

# Automatos Finitos

$a^n$



Sistemas de Estados Finitos  
AF Determinísticos

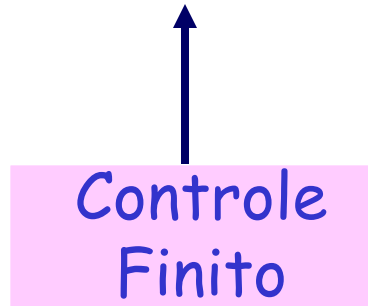
## Definição formal de um AF Determinístico

- Um AF Determinístico (AFD) é denotado formalmente por uma **quíntupla**  $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  onde:
- $Q$  é o conjunto de estados
- $\Sigma$  é um alfabeto finito
- $q_0 \in Q$  é o estado inicial
- $F \subseteq Q$  é o conjunto de estados finais
- $\delta$  (delta) é a função de transição de estados mapeando  $Q \times \Sigma \rightarrow Q$ .

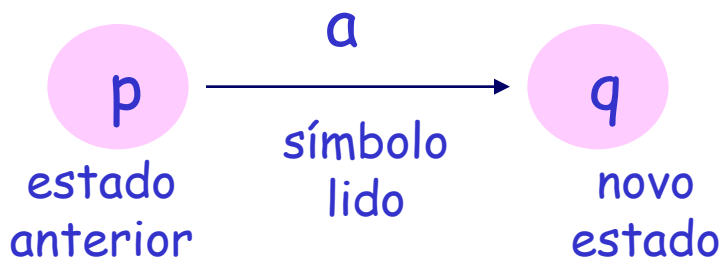
$$\delta(q_i, a) = q_j \quad \rightarrow \text{determinismo}$$

# Esquema da Máquina e Representação usando grafos

Esquema:



Fita com a seqüência de símbolos de  $\Sigma$



## Exemplo

Seja

$L = \{w \mid w \text{ é da forma } x01y \text{ para algumas cadeias } x \text{ e } y \text{ que consistem somente de } 0\text{'s e } 1\text{'s}\}$  ou

$L = \{ x01y \mid x \text{ e } y \in \{0,1\}^* \}$

Então  $01, 11010$  e  $100011 \in L$  e

$\lambda, 0$  e  $111000 \notin L$ .

Vejam os: Seja  $A$  o autômato.

$\Sigma = \{0,1\}$ . Seja  $q_0 \in Q$  o estado inicial. Para decidir se  $01$  é uma subcadeia da entrada,  $A$  precisa lembrar:

1. Ele já viu 01? Se sim, ele aceita toda sequência de caracteres adicionais; i.e, de agora em diante ele estará sempre num estado final (de aceitação).
2. Ele nunca viu 01, mas o último caracter foi 0; assim, se agora ele vir o 1, terá visto 01 e poderá aceitar tudo que vier daqui por diante.
3. Ele nunca viu 01, mas ou ele acabou de iniciar ou acabou de encontrar 1; nesse caso, A não pode aceitar até ver primeiro um 0 seguido de 1.

Cada uma das condições acima pode ser representada por um estado. A condição (3) é o estado inicial  $q_0$ . Ficamos nesse estado até aparecer um 0. Logo  $\delta(q_0, 1) = q_0$ .

Mas se estamos em  $q_0$  e vemos um 0, estamos na condição (2). Seja  $q_2$  esse estado. Assim,  $\delta(q_0, 0) = q_2$

Se, em  $q_2$ , vemos um 0, ainda não encontramos 01, mas estamos na mesma situação de ter o 0 e esperar o 1; logo, ficamos no mesmo estado:  $\delta(q_2, 0) = q_2$ .

Se, no entanto, em  $q_2$ , vemos 1, então teremos a subcadeia 01 e podemos ir para um estado final, que corresponde à situação (1); chamaremos de  $q_1$ . Logo,  $\delta(q_2, 1) = q_1$ .

Em  $q_1$ , já vimos a sequência 01, então não importa o que aparecer, ainda estaremos na situação de já ter visto 01. Isto é,  $\delta(q_1, 0) = \delta(q_1, 1) = q_1$ .

Dessa forma,  $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ .  $q_0$  é o estado inicial e  $F = \{q_1\}$ :

$$A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_1\}),$$

onde  $\delta$  é a função de transição descrita anteriormente.

# Aceitando cadeias - função de transição estendida

Estendemos a função de transição para aceitar cadeias:

$$\delta': Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$$

$\delta'(q,w)$  é um estado  $p$  onde o AF vai estar depois de ler a cadeia  $w$ , começando do estado  $q$ . Isto é, existe um caminho no diagrama de transições de  $q$  para  $p$  denominado  $w$

Definimos  $\delta'$  por indução:

1) BASE:  $\delta'(q,\lambda) = q$

(sem ler um símbolo de entrada o AF não pode mudar de estado)

2) INDUÇÃO: Suponha  $w$  uma cadeia da forma  $xa$ ; ou seja,  $a$  é o último símbolo de  $w$ , e  $x$  é a subcadeia que consiste de tudo, menos o último símbolo. Então:

$$\delta'(q,w) = \delta(\delta'(q,x),a)$$

Para calcular  $\delta'(q,w)$ , primeiro calculamos  $\delta'(q,x)$ . Suponha que esse estado seja  $p$ , ou seja,  $\delta'(q,x)=p$ . Então  $\delta'(q,w)$  é o que obtemos fazendo uma transição do estado  $p$  sobre a entrada  $a$ , o último símbolo de  $w$ . Isto é,  $\delta'(q,w) = \delta(p,a)$ .

## Linguagem aceita por um AF M

- Uma cadeia  $x$  é aceita pelo AFD  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  se  $\delta'(q_0, x) = p$  para algum  $p \in F$ .

Ou

- $L(M) = \{x \mid \delta'(q_0, x) \in F\}$
- Def 1: Uma linguagem aceita por um AFD é uma **Linguagem Regular**
- Def 2: Dois AF  $M_1$  e  $M_2$  são equivalentes se e somente se  $L(M_1) = L(M_2)$



# Exercício

Fazer um AFD  $M$  tal que

$L(M) = \{w \mid w \in \{0,1\}^* \text{ e possui um número par de ocorrências de } 0\text{'s e de } 1\text{'s}\}$

<http://www.jflap.org/>

# Exemplo 1

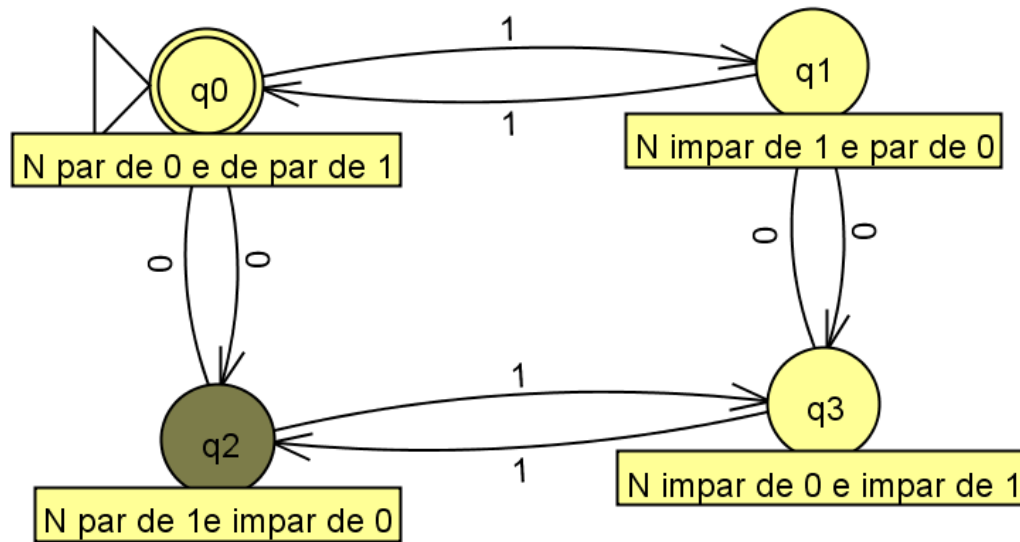
Fazer um AFD  $M$  que aceita  $L(M) = \{w \mid w \text{ possui um nro par de } 0\text{'s e de } 1\text{'s}\}$

The screenshot displays the JFLAP software interface. At the top, the title bar reads "JFLAP : <untitled1>". Below it is a menu bar with "File", "Input", "Test", "Convert", and "Help". A toolbar contains "Editor" and "Simulate: 110101".

The main workspace is divided into three sections:

- Diagrama de Transição de Estados:** A state transition diagram with four states:  $q_0$  (green, start state),  $q_1$  (yellow),  $q_2$  (yellow), and  $q_3$  (yellow). Transitions are:  $q_0 \xrightarrow{0} q_2$ ,  $q_2 \xrightarrow{0} q_0$ ,  $q_0 \xrightarrow{1} q_1$ ,  $q_1 \xrightarrow{1} q_0$ ,  $q_1 \xrightarrow{0} q_3$ ,  $q_3 \xrightarrow{0} q_1$ ,  $q_2 \xrightarrow{1} q_3$ , and  $q_3 \xrightarrow{1} q_2$ .
- Simulation Window:** A green panel on the left showing the current state  $q_0$  and an input string "110101".
- Traceback Window:** A window on the right showing a sequence of states and transitions for the input "110101":  $q_0 \xrightarrow{1} q_1$ ,  $q_1 \xrightarrow{0} q_3$ ,  $q_3 \xrightarrow{0} q_1$ ,  $q_1 \xrightarrow{1} q_0$ ,  $q_0 \xrightarrow{1} q_1$ , and  $q_1 \xrightarrow{0} q_3$ . The final state  $q_3$  is highlighted in green.

At the bottom, a control bar includes buttons for "Step", "Reset", "Freeze", "Thaw", "Trace", and "Remove". The Windows taskbar at the very bottom shows the "Iniciar" button, several open files, and the system clock at 15:44.



q2

110

Cadeia não aceita:  
configuração final  
ROSA

## Reconhecimento de 110101

$$\delta(q_0,1) = q_1 \text{ e } \delta(q_1,1) = q_0$$

$$\text{Assim: } \delta' (q_0,11) = \delta(\delta(q_0,1),1) = \delta(q_1,1) = q_0 \dots \delta' (q_0,110101) = q_0$$

Portanto 110101 está na  $L(M)$

$$M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0,1\}, \delta, q_0, \{q_0\})$$

$\delta :$		entradas		Função de Transição de Estados
		0	1	
Tabela de Transição de Estados	estados			
	$q_0$	$q_2$	$q_1$	$\delta(q_0,0) = q_2$ $\delta(q_0,1) = q_1$
	$q_1$	$q_3$	$q_0$	$\delta(q_1,0) = q_3$ $\delta(q_1,1) = q_0$
	$q_2$	$q_0$	$q_3$	$\delta(q_2,0) = q_0$ $\delta(q_2,1) = q_3$
	$q_3$	$q_1$	$q_2$	$\delta(q_3,0) = q_1$ $\delta(q_3,1) = q_2$

# Como projetar um AF?

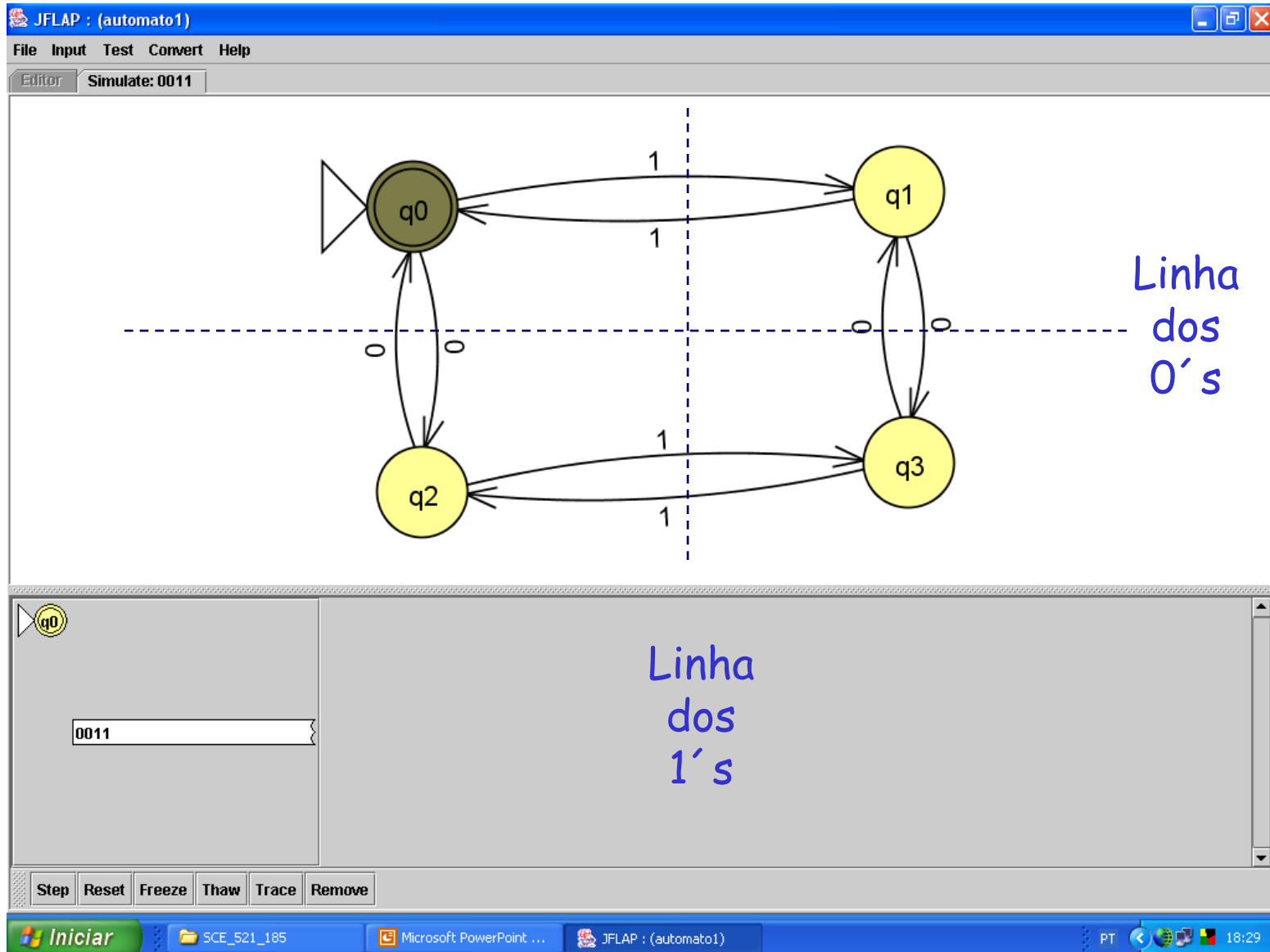
Tendo somente uma memória finita,

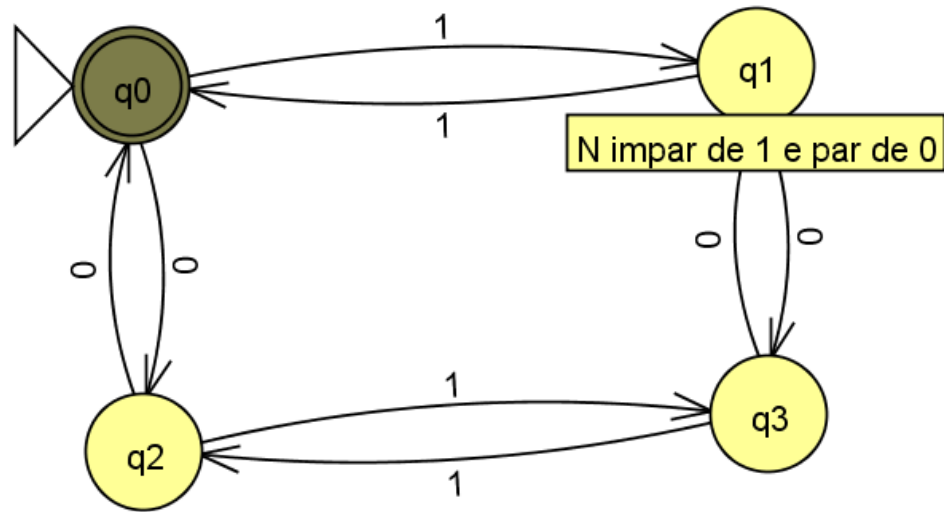
só podemos lembrar as informações importantes e associá-las aos estados

Usamos os estados para armazenar a paridade dos números

e não

os números, o que exigiria um número infinito de estados





q0

0011

JFLAP : (automato1)

File Input Test Convert Help

Editor Simulate: 0011

N impar de 1 e par de 0

N impar de 0 e impar de 1

q0

q1

q2

q3

0011

Step Reset Freeze Thaw Trace Remove

Iniciar SCE\_521\_185 Microsoft PowerPoint ... JFLAP : (automato1) PT 18:26

JFLAP : (automato1)

File Input Test Convert Help

Editor Simulate: 0011

```
graph LR; q0((q0)) -- 1 --> q1((q1)); q1 -- 1 --> q0; q0 -- 0 --> q2((q2)); q2 -- 0 --> q0; q2 -- 1 --> q3((q3)); q3 -- 1 --> q2; q1 -- 0 --> q3; q3 -- 0 --> q1;
```

N impar de 1 e par de 0

N par de 1 e impar de 0

q0

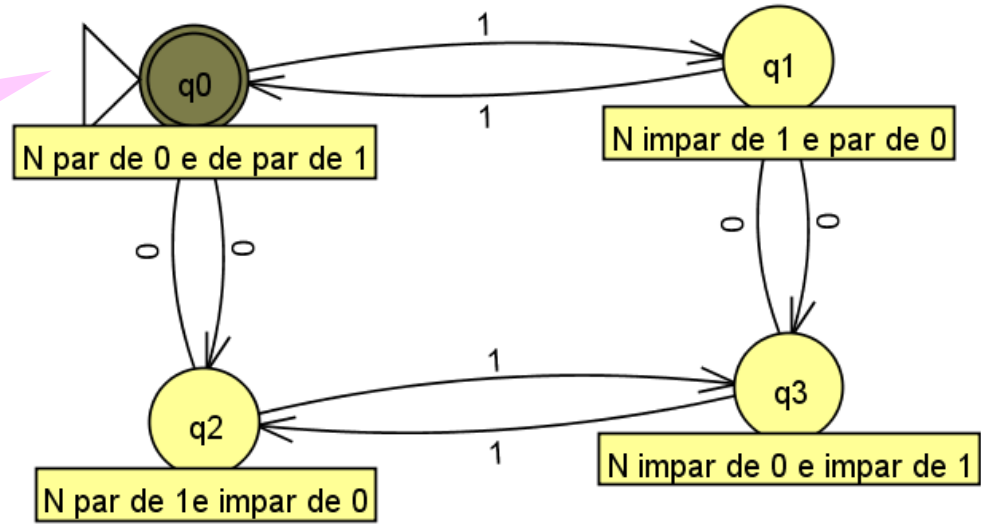
0011

Step Reset Freeze Thaw Trace Remove

Iniciar SCE\_521\_185 Microsoft PowerPoint ... JFLAP : (automato1) PT 18:25



Quando o estado final é o inicial a cadeia vazia é aceita



Início de uma simulação, entrada em negrito

q0

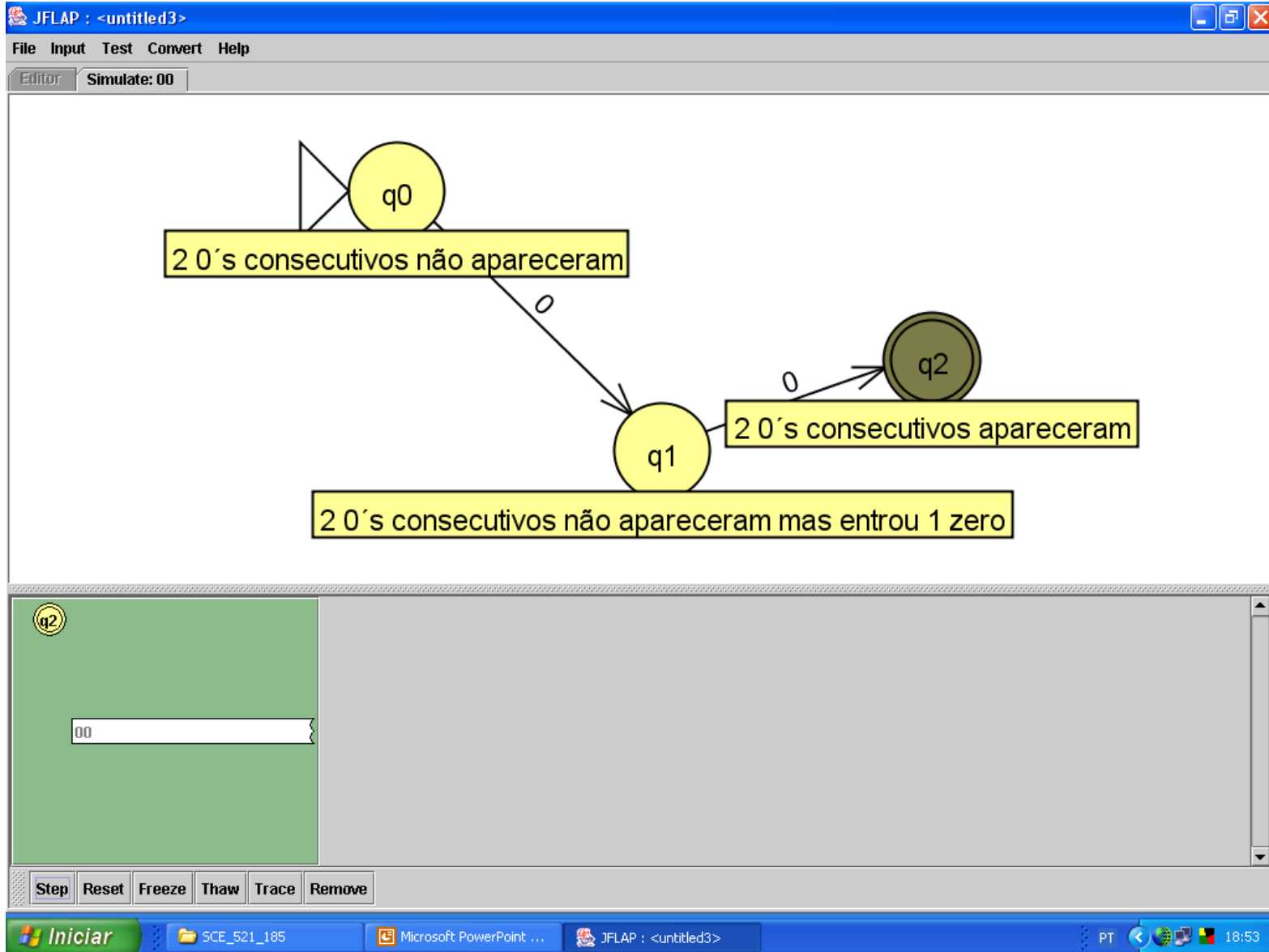
**0011**

## Exemplo 2

Fazer um AFD M que aceita

$L(M) = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ possui pelo menos dois } 0\text{'s consecutivos}\}$

Garantindo  
a  
restrição...



# Completando o AFD M e reconhecendo uma cadeia de L(M)

$$M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2\})$$

JFLAP : <untitled3>

File Input Test Convert Help

Editor Simulate: 1110010101

$\delta$ :

```
graph LR; q0((q0)) -- 1 --> q0; q0 -- 0 --> q1((q1)); q1 -- 1 --> q0; q1 -- 0 --> q2(((q2))); q2 -- 1 --> q2; q2 -- 0 --> q2;
```

q2

1110010101

Fim de uma simulação, entrada em cinza

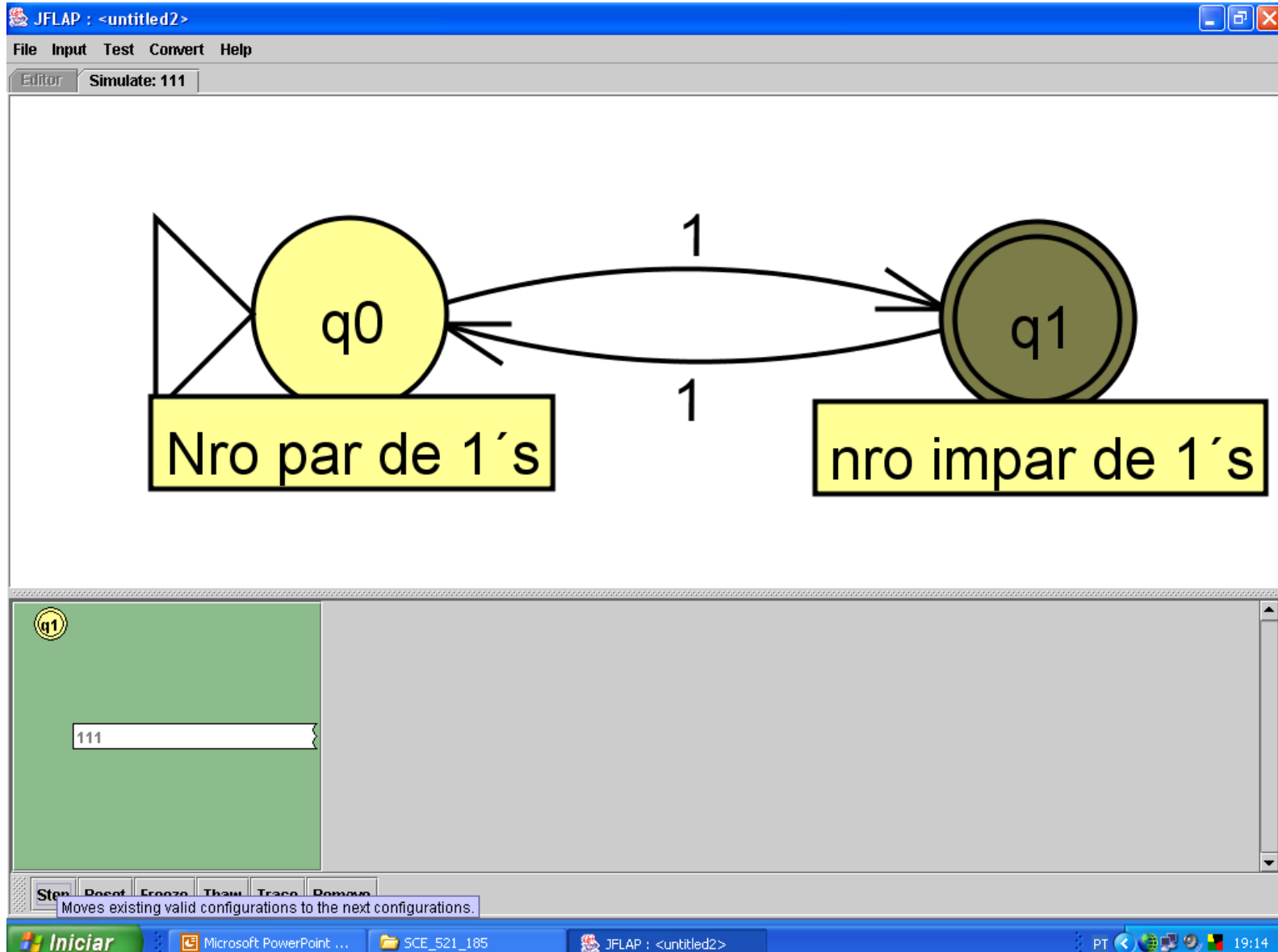
Step Reset Freeze Thaw Trace Remove

Iniciar SCE\_521\_185 Microsoft PowerPoint ... JFLAP : <untitled3> PT 19:00

### Exemplo 3

Fazer um AFD  $M$  que aceita  $L(M) = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ possui um número ímpar de } 1\text{'s}\}$

Garantindo  
a  
restrição...



# Completando o AFD M e reconhecendo uma cadeia de L(M)

$$M = (\{q_0, q_1\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_1\})$$

JFLAP : <untitled2>

File Input Test Convert Help

Editor Simulate: 001110

$\delta$ :

```
graph LR; q0((q0)) -- 0 --> q0; q0 -- 1 --> q1((q1)); q1 -- 0 --> q1; q1 -- 1 --> q0;
```

q1

001110

Aceitação no JFLAP = verde, com indicação do estado em que parou ou ler a cadeia de entrada

Step Reset Freeze Thaw Trace Remove

Microsoft PowerPoint ... SCE\_521\_185 JFLAP : <untitled2> PT 19:17