Automatos Finitos

Sistemas de Estados Finitos

AF Determinísticos

Definição formal de um AF Determinístico

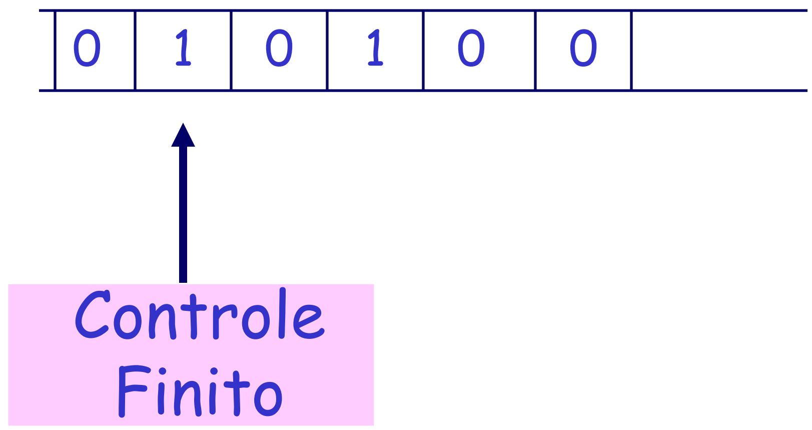
- Um AF Determinístico (AFD) é denotado formalmente por uma quíntupla $(Q, \Sigma, \delta, qo, F)$ onde:

- Q é o conjunto de estados
- Σ é um alfabeto finito
- $qo \in Q$ é o estado inicial
- $F \subseteq Q$ é o conjunto de estados finais
- δ (delta) é a função de transição de estados mapeando $Q \times \Sigma \rightarrow Q$.

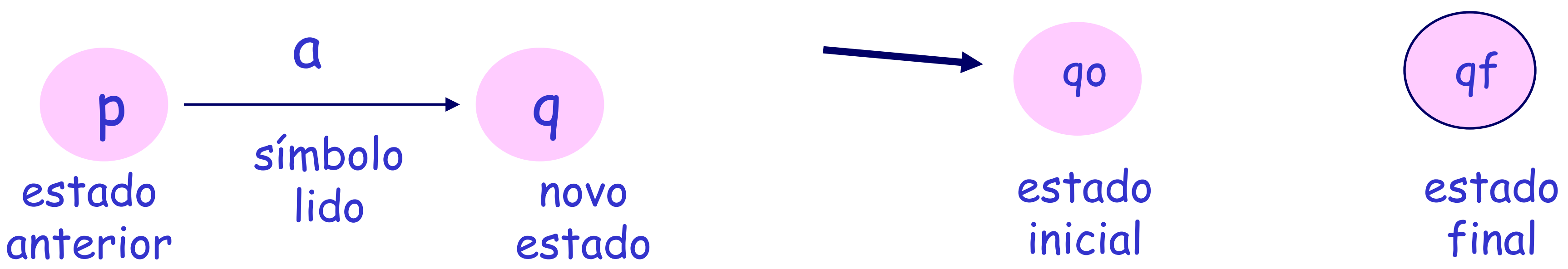
  $\delta(qi,a) = qj$ → determinismo

Esquema da Máquina e Representação usando grafos

Esquema:



Fita com a seqüência de símbolos de Σ



Exemplo

Seja

L = {w|w é da forma x01y para algumas cadeias x e y que consistem somente de 0´s e 1´s} ou

$L = \{ x01y \mid x \text{ e } y \in \{0,1\}^* \}$

Então 01, 11010 e 100011 $\in$ L e

λ, 0 e 111000 $\notin$ L.

Vejamos: Seja *A* o autômato.

$\Sigma = \{0,1\}$. Seja $q_0 \in Q$ o estado inicial. Para decidir se 01 é uma subcadeia da entrada, *A* precisa lembrar:

1. Ele já viu 01? Se sim, ele aceita toda sequência de caracteres adicionais; i.e, de agora em diante ele estará sempre num estado final (de aceitação).
2. Ele nunca viu 01, mas o último caracter foi 0; assim, se agora ele vir o 1, terá visto 01 e poderá aceitar tudo que vier daqui por diante.
3. Ele nunca viu 01, mas ou ele acabou de iniciar ou acabou de encontrar 1; nesse caso, A não pode aceitar até ver primeiro um 0 seguido de 1.

Cada uma das condições acima pode ser representada por um estado. A condição (3) é o estado inicial qo. Ficamos nesse estado até aparecer um 0. Logo $\delta(qo, 1) = qo$.

Mas se estamos em qo e vemos um 0, estamos na condição (2). Seja q2 esse estado. Assim, $\delta(qo, 0)=q2$

Se, em q2, vemos um 0, ainda não encontramos 01, mas estamos na mesma situação de ter o 0 e esperar o 1; logo, ficamos no mesmo estado: $\delta(q2, 0)=q2$.

Se, no entanto, em q2, vemos 1, então teremos a subcadeia 01 e podemos ir para um estado final, que corresponde à situação (1); chamaremos de q1. Logo, $\delta(q2,1)=q1$.

Em q1, já vimos a sequência 01, então não importa o que aparecer, ainda estaremos na situação de já ter visto 01. Isto é, $\delta(q1,0) = \delta(q1, 1) = q1$.

Dessa forma, Q={qo, q1, q2}. qo é o estado inicial e F={q1}:

$$A = (\{qo, q1, q2\}, \{0,1\}, \delta, qo, \{q1\}),$$

onde δ é a função de transição descrita anteriormente.

Aceitando cadeias – função de transição estendida

Estendemos a função de transição para aceitar cadeias:

δ': Q X $\Sigma^* \rightarrow$ Q

$\delta'(q,w)$ é um estado p onde o AF vai estar depois de ler a cadeia w, começando do estado q. Isto é, existe um caminho no diagrama de transições de q para p denominado w

Definimos δ' por indução:

1) BASE: $\delta'(q,\lambda) = q$

(sem ler um símbolo de entrada o AF não pode mudar de estado)

2) INDUÇÃO: Suponha w uma cadeia da forma xa; ou seja, a é o último símbolo de w, e x é a subcadeia que consiste de tudo, menos o último símbolo. Então:

$$\delta'(q,w) = \delta(\delta'(q,x),a)$$

Para calcular $\delta'(q,w)$, primeiro calculamos $\delta'(q,x)$. Suponha que esse estado seja p, ou seja, $\delta'(q,x)=p$. Então $\delta'(q,w)$ é o que obtemos fazendo uma transição do estado p sobre a entrada a, o último símbolo de w. Isto é, $\delta'(q,w) = \delta(p,a)$.

Linguagem aceita por um AF M

- Uma cadeia x é aceita pelo AFD $M = (Q, \Sigma, \delta, qo, F)$ se $\delta'(qo,x) = p$ para algum $p \in F$.

Ou

- $L(M) = \{x \mid \delta'(qo,x) \in F\}$

- Def 1: Uma linguagem aceita por um AFD é uma Linguagem Regular

- Def 2: Dois AF M1 e M2 são equivalentes se e somente se L(M1) = L(M2)

Exercício

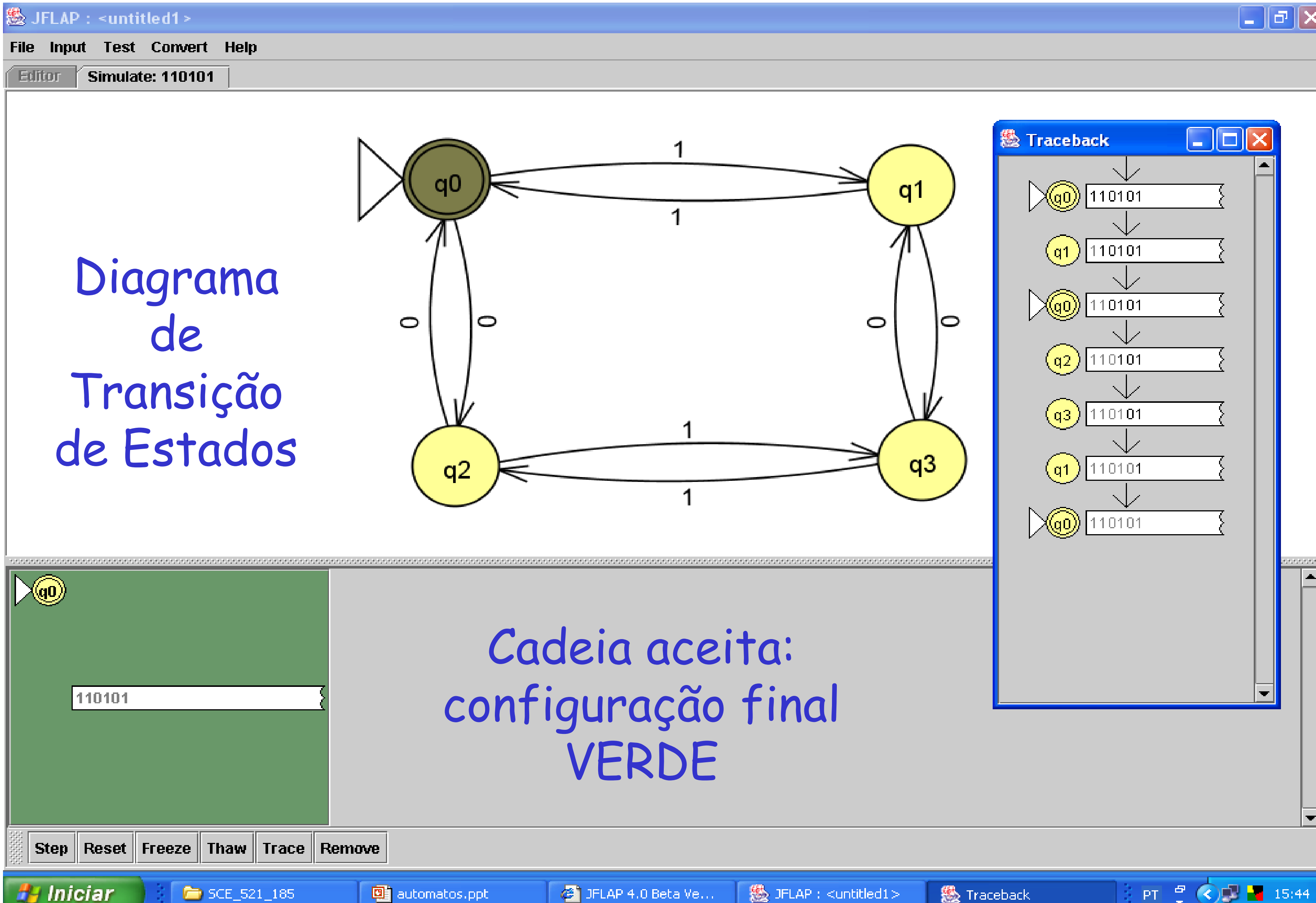
Fazer um AFD M tal que

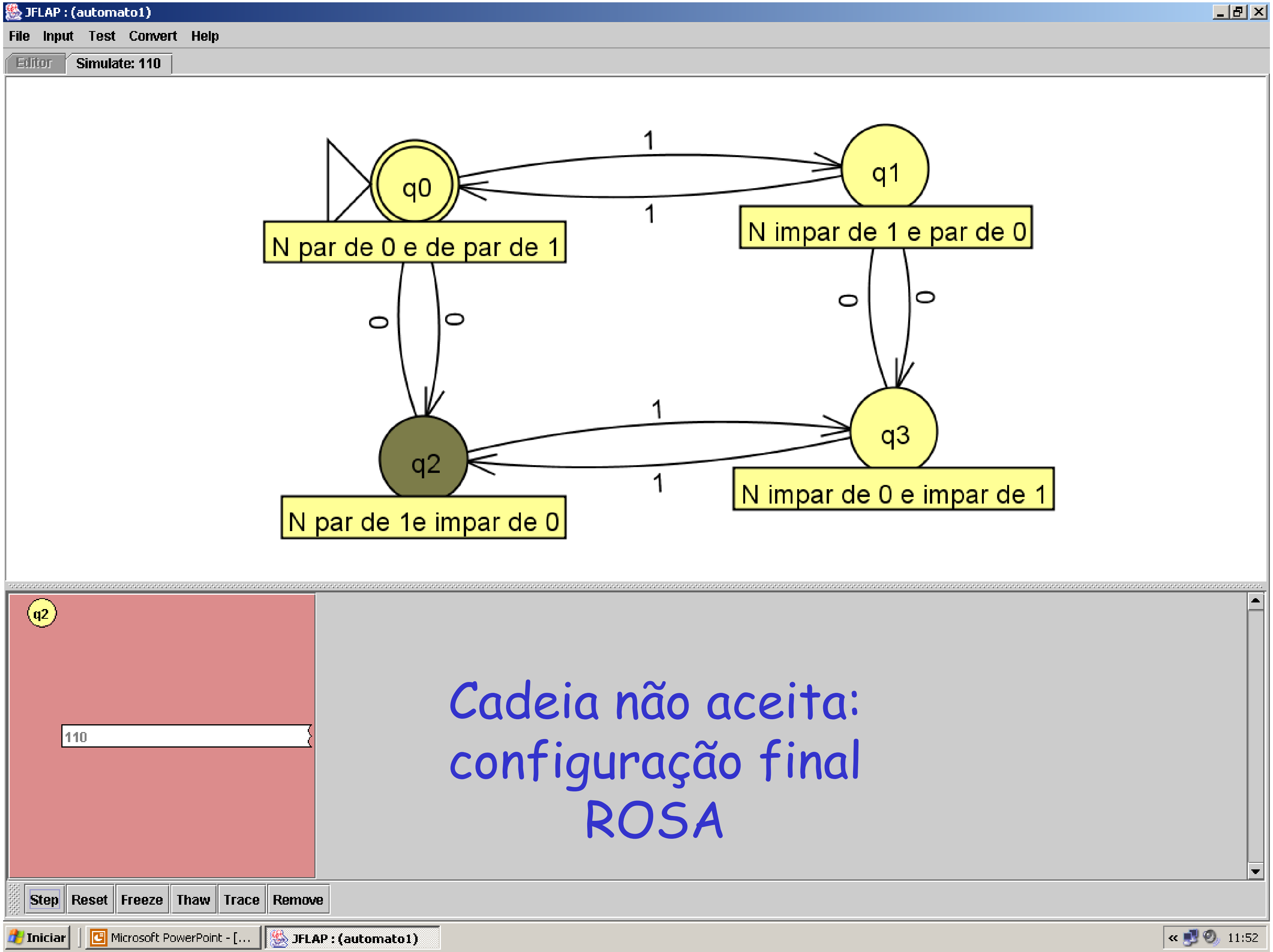
$L(M) = \{w \mid w \in \{0,1\}^*$ e possui um número par de ocorrências de 0´s e de 1´s $\}$

http://www.jflap.org/

Exemplo 1

Fazer um AFD M que aceita L(M) = {w | w possui um nro par de 0´s e de 1´s }




JFLAP : (automato1)
File Input Test Convert Help
Editor Simulate: 110
1
1
q0
q1
N par de 0 e de par de 1
N impar de 1 e par de 0
0
0
0
0
1
1
q2
q3
N par de 1e impar de 0
N impar de 0 e impar de 1
q2
110
Cadeia não aceita:
configuração final
ROSA
Step Reset Freeze Thaw Trace Remove
Iniciar
Microsoft PowerPoint - [...
JFLAP : (automato1)
11:52

Reconhecimento de 110101

$\delta(qo,1) = q1$ e $\delta(q1,1) = qo$

Assim: $\delta'(qo,11) = \delta(\delta(qo,1),1) = \delta(q1,1) = qo \ldots \delta'(qo,110101) = qo$

Portanto 110101 está na L(M)

$$M = (\{qo,q1,q2,q3\}, \{0,1\}, \delta, qo, \{qo\})$$

δ : estados	entradas 0	1
qo	q2	q1
q1	q3	q0
q2	q0	q3
q3	q1	q2

Tabela de Transição de Estados

Função de Transição de Estados

$\delta(qo,0) = q2$ $\delta(qo,1) = q1$

$\delta(q1,0) = q3$ $\delta(q1,1) = q0$

$\delta(q2,0) = q0$ $\delta(q2,1) = q3$

$\delta(q3,0) = q1$ $\delta(q3,1) = q2$

Como projetar um AF?

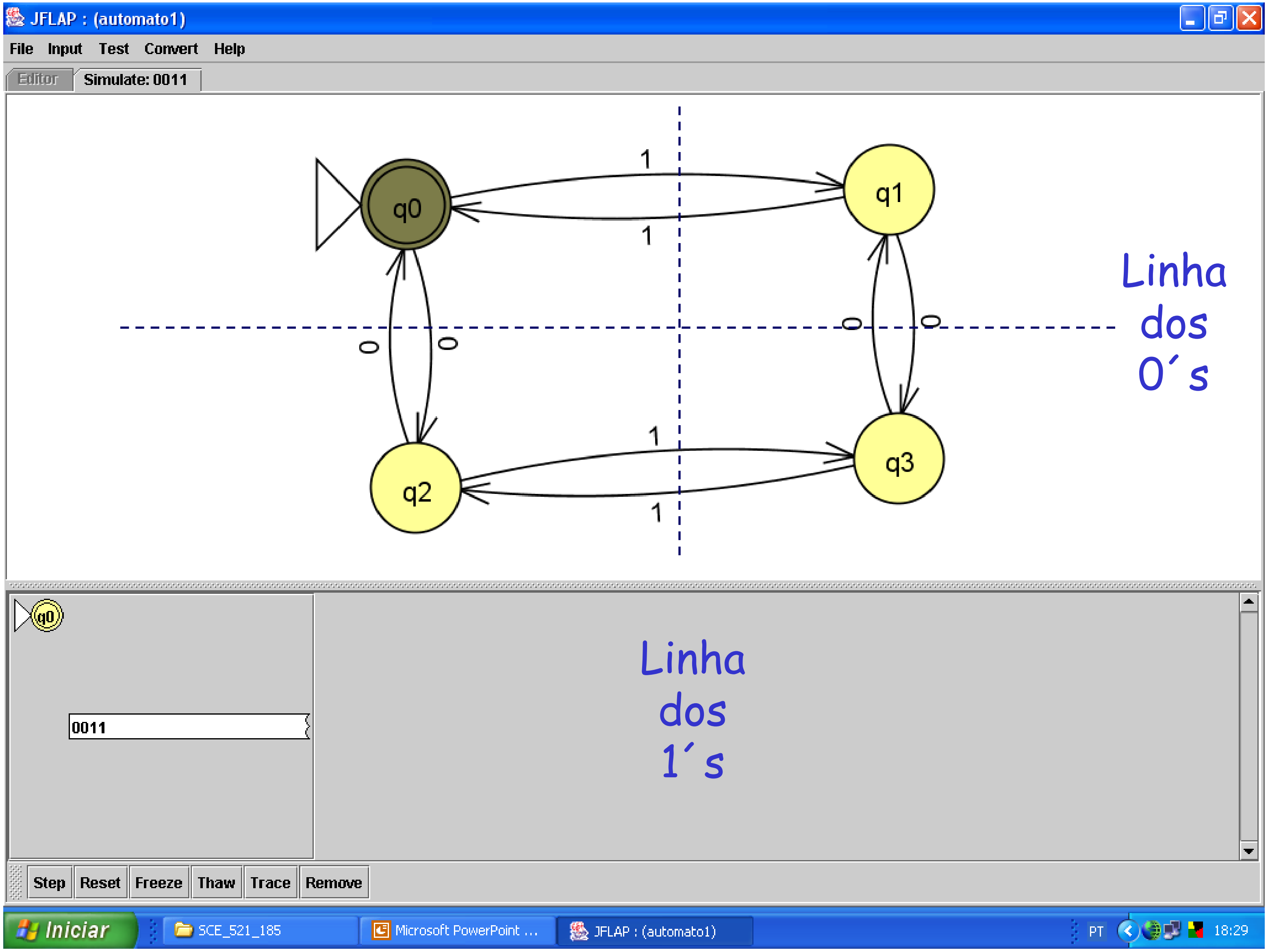
Tendo somente uma memória finita,

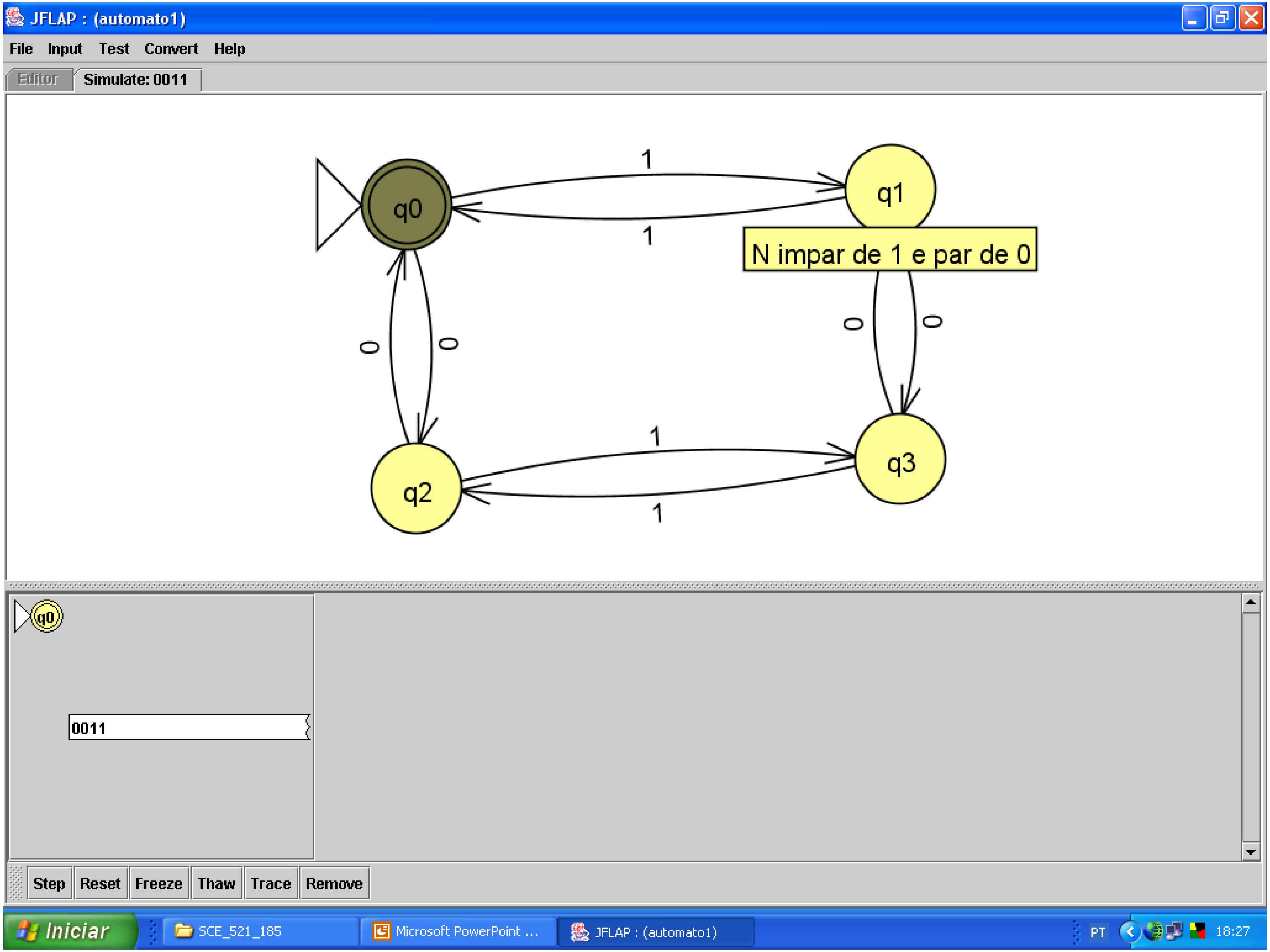
só podemos lembrar as informações importantes e associá-las aos estados

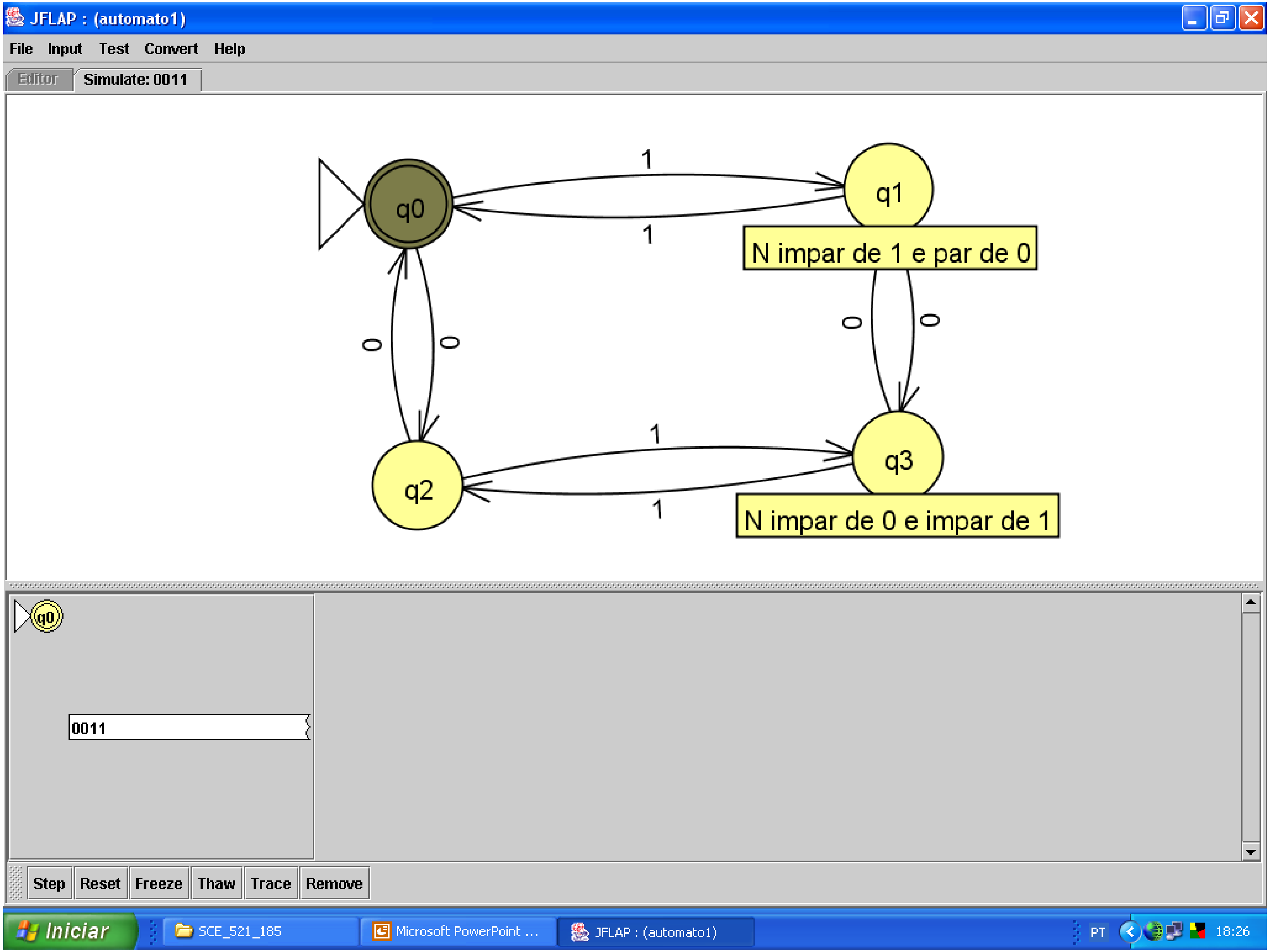
Usamos os estados para armazenar a paridade dos números

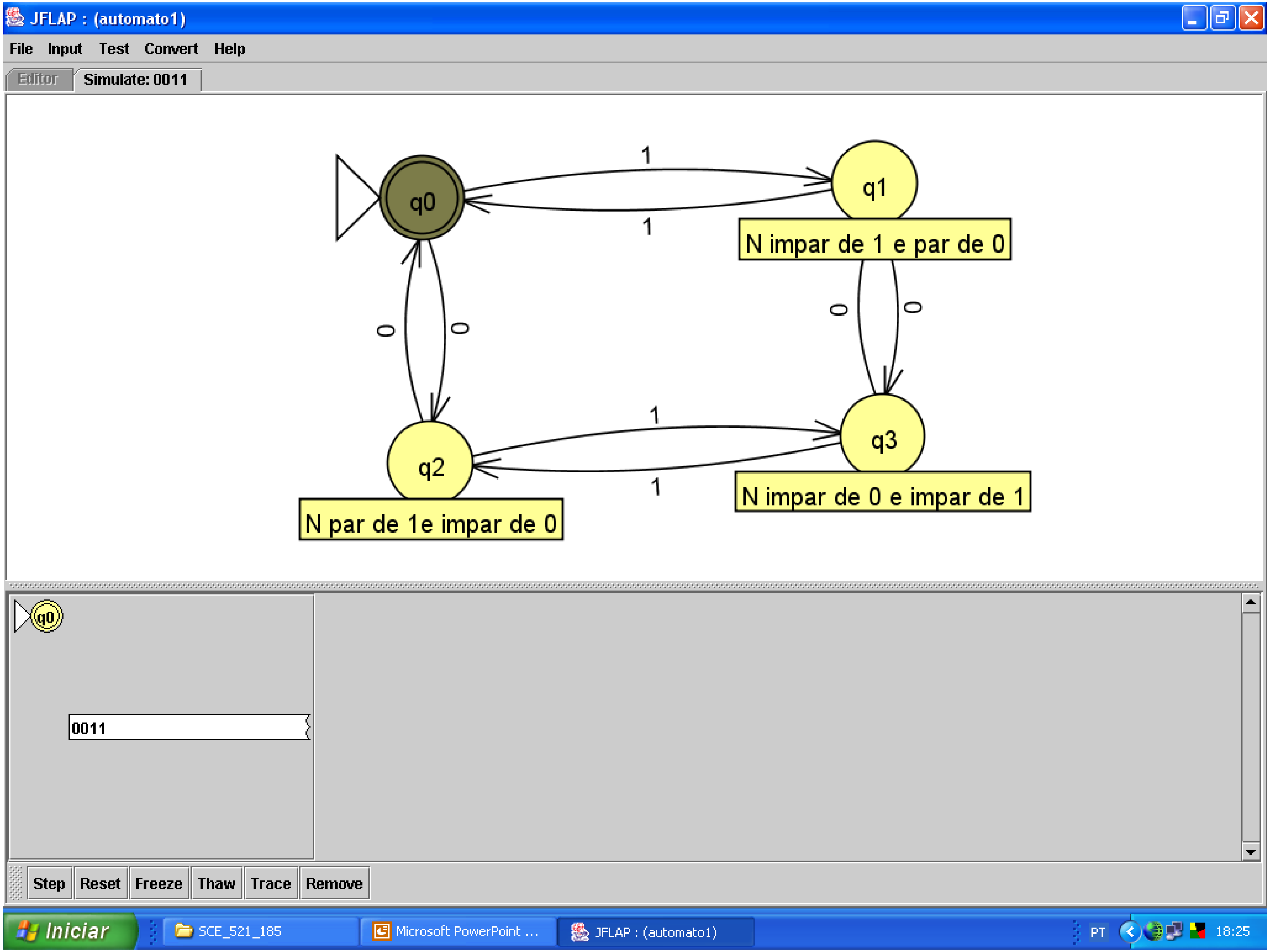
e não

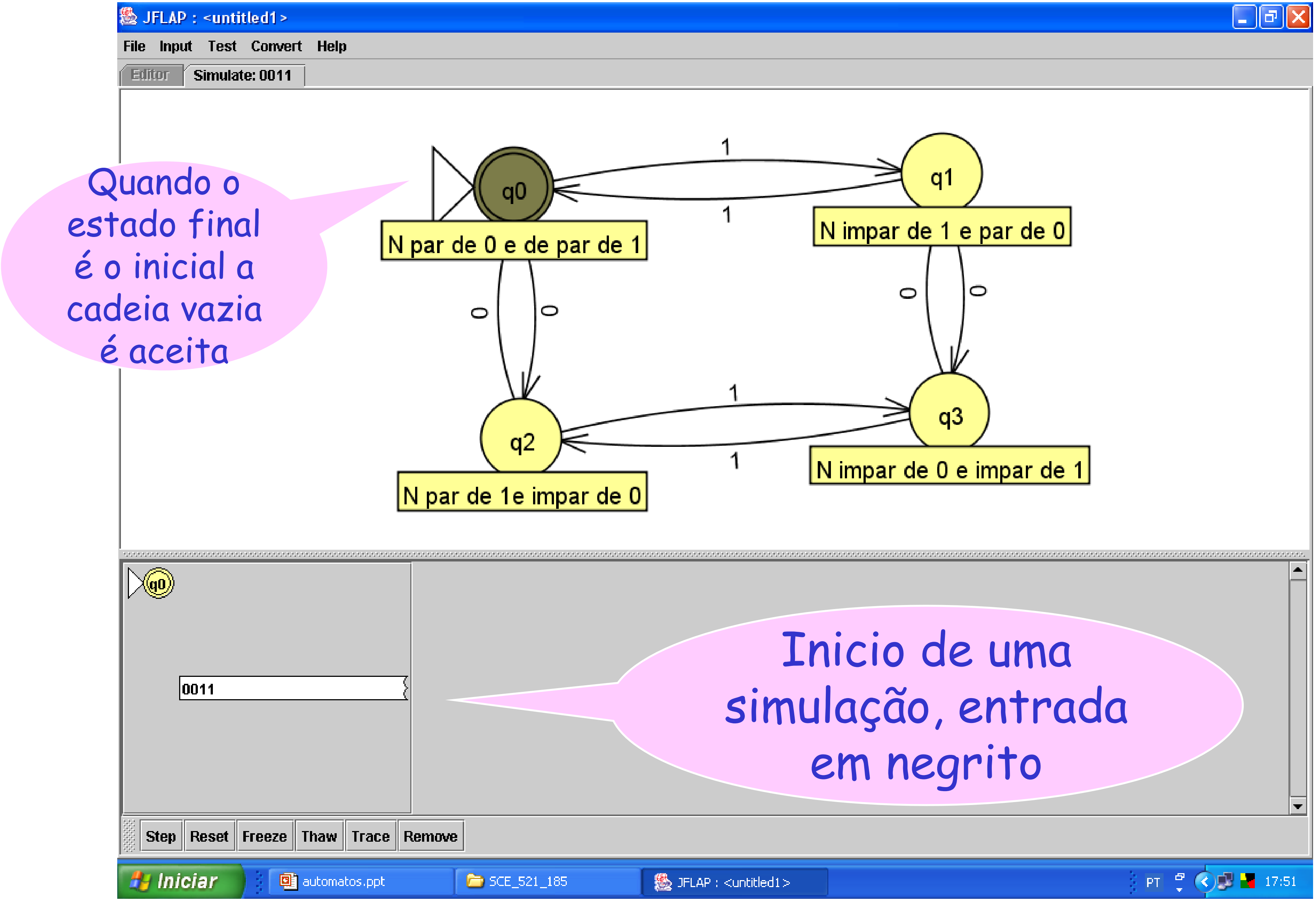
os números, o que exigiria um número infinito de estados




JFLAP : (automato1)
File Input Test Convert Help
Editor
Simulate: 0011
q0
q1
q2
q3
1
1
0
0
0
0
1
1
N impar de 1 e par de 0
q0
0011
Step Reset Freeze Thaw Trace Remove
Iniciar
SCE_521_185
Microsoft PowerPoint ...
JFLAP : (automato1)
PT
18:27


JFLAP : (automato1)
File Input Test Convert Help
Editor
Simulate: 0011
q0
q1
q2
q3
1
1
0
0
0
0
1
1
N impar de 1 e par de 0
N impar de 0 e impar de 1
0011
Step Reset Freeze Thaw Trace Remove
Iniciar
SCE_521_185
Microsoft PowerPoint ...
JFLAP : (automato1)
PT
18:26

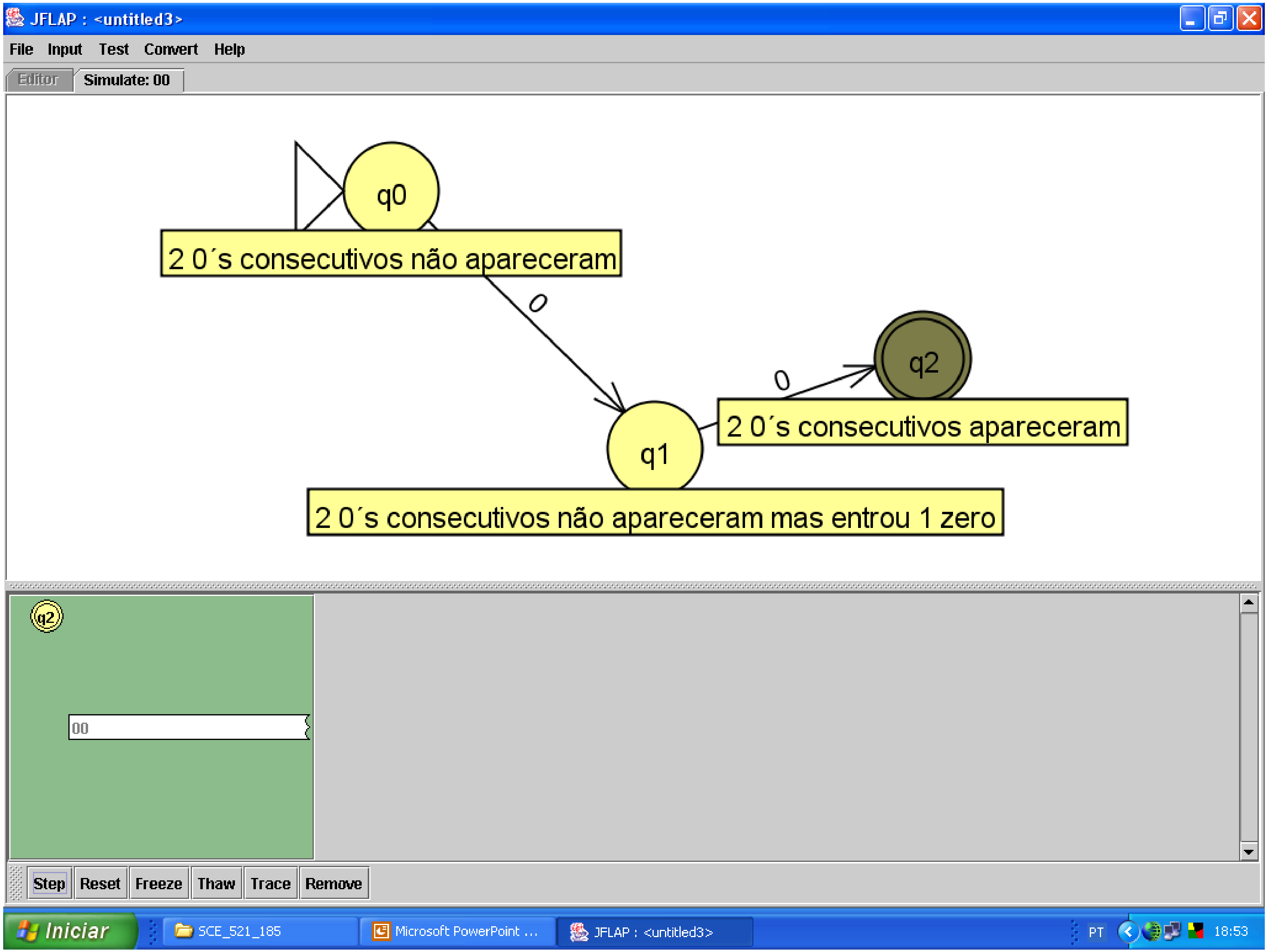

JFLAP : (automato1)
File Input Test Convert Help
Editor
Simulate: 0011
q0
q1
q2
q3
1
1
0
0
0
0
1
1
N impar de 1 e par de 0
N par de 1e impar de 0
N impar de 0 e impar de 1
0011
Step
Reset
Freeze
Thaw
Trace
Remove
Iniciar
SCE_521_185
Microsoft PowerPoint ...
JFLAP : (automato1)
PT
18:25


Quando o estado final é o inicial a cadeia vazia é aceita
JFLAP : <untitled1>
File Input Test Convert Help
Editor
Simulate: 0011
q0
q1
q2
q3
N par de 0 e de par de 1
N impar de 1 e par de 0
N par de 1e impar de 0
N impar de 0 e impar de 1
0011
Inicio de uma simulação, entrada em negrito
Step Reset Freeze Thaw Trace Remove
Iniciar
automatos.ppt
SCE_521_185
JFLAP : <untitled1>
PT
17:51

Exemplo 2

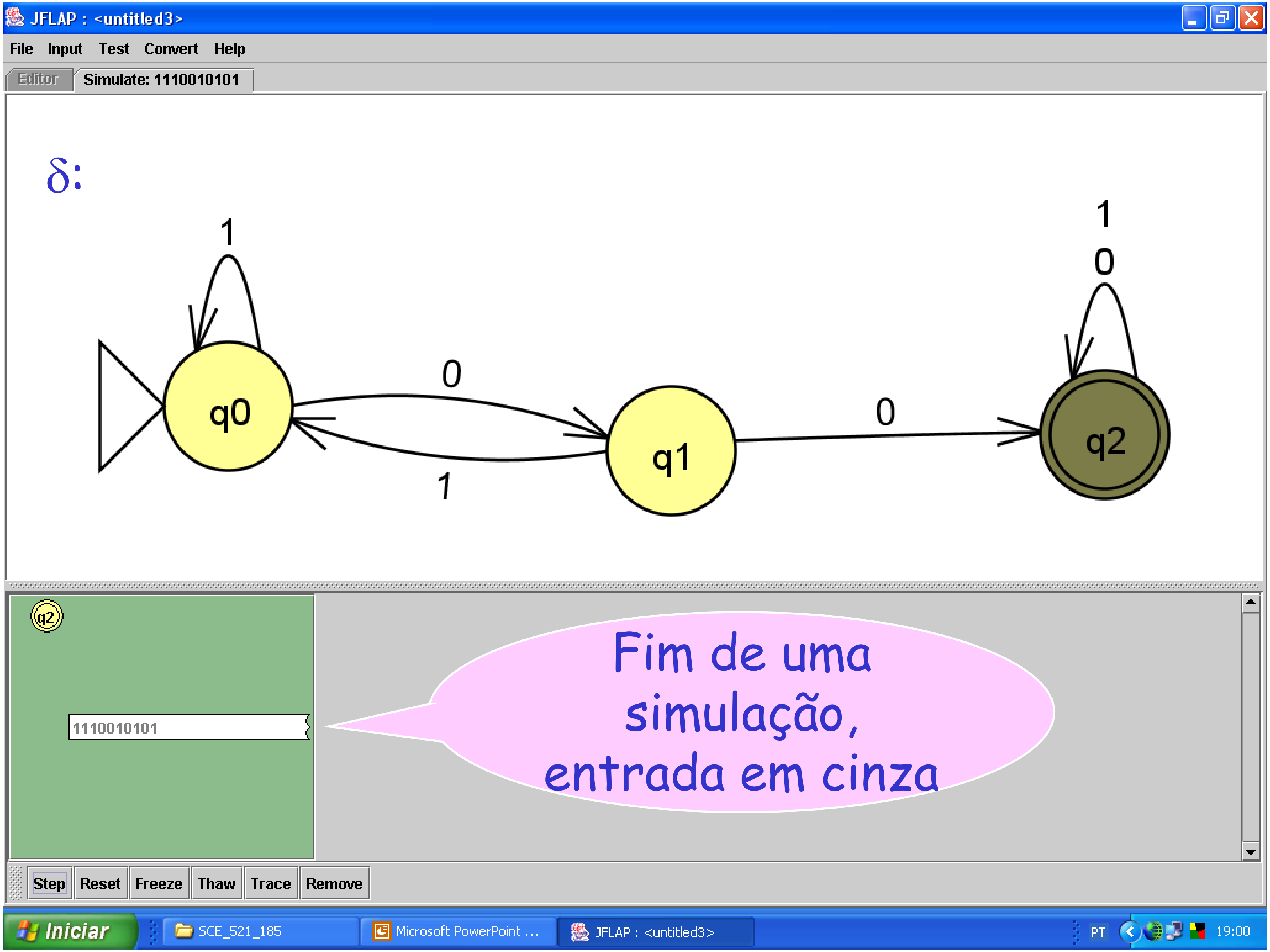
Fazer um AFD M que aceita
L(M) = {w ∈ {0,1}* |w possua pelo menos dois 0´s consecutivos}

Garantindo a restrição...



Completando o AFD M e reconhecendo uma cadeia de L(M)

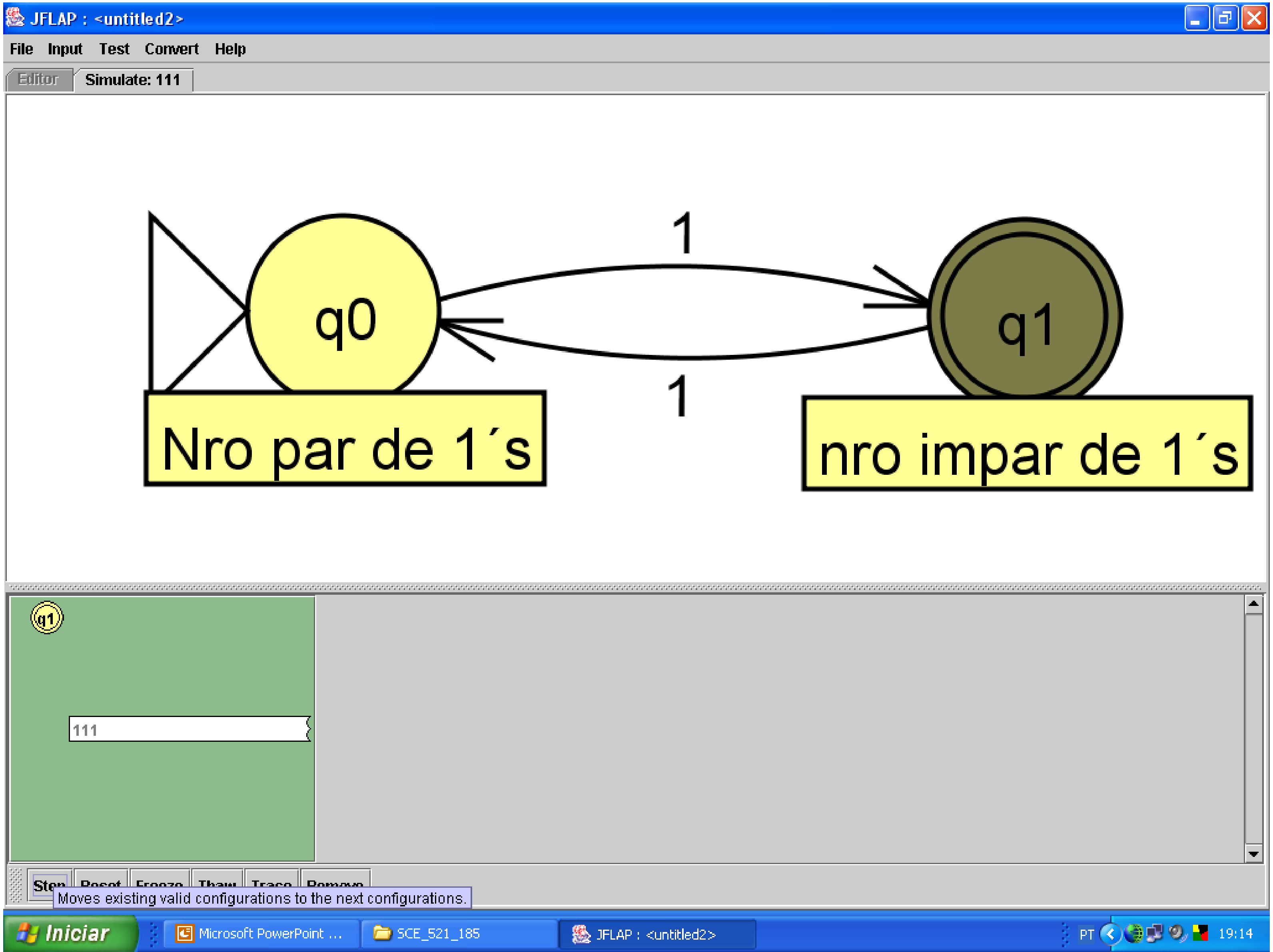
$$M = (\{q0,q1,q2\}, \{0,1\}, \delta, q0,\{q2\})$$



Exemplo 3

Fazer um AFD M que aceita L(M) = {w $\in$ {0,1}* |w possua um número impar de 1´s}

Garantindo a restrição...



Completando o AFD M e reconhecendo uma cadeia de L(M)

$$M = (\{q0,q1\}, \{0,1\}, \delta, q0,\{q1\})$$