7.a Lista de Exercícios de SMA304 - Álgebra Linear

Exercício 1. Encontrar os autovalores e autovetores de $T \in \mathcal{L}(V)$ nos seguintes casos:

(a) $V \doteq \mathbb{R}^2$,e $T : V \to V$, dada por $T(x,y) \doteq (x+y, x-y)$, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) $V \doteq \mathbb{R}^3$, $T(1,0,0) \doteq (2,0,0)$, $T(0,1,0) \doteq (2,1,2)$, $T(0,0,1) \doteq (3,2,1)$.

(c) $V \doteq \mathbb{R}^4$ e $[T]_{\mathcal{B}} \doteq \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, onde $\mathcal{B}$ é base canônica de $\mathbb{R}^4$.

Exercício 2.

(a) Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz triangular (superior ou inferior), isto é, $A = (a_{ij})$ onde $a_{ij} = 0$, sempre que $i > j$ (ou sempre que $i < j$). Qual o polinômio característico de A?

(b) Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes triangulares com a mesma diagonal principal. Existe alguma relação entre seus polinômios característicos? Qual?

(c) Mostre que se λ é autovalor de $T \in \mathcal{L}(V)$ então λ^n é autovalor de T^n.

(d) Mostre que se $p = p(t)$ é um polinômio e λ é autovalor de $T \in \mathcal{L}(V)$ então $p(\lambda)$ é autovalor do operador linear $p(T)$, onde

$$p(T) \doteq a_o I + a_1 T + \cdots + a_n T^n\,, \quad \text{para} \quad T \in \mathcal{L}(V)\,,$$

onde $I : V \to V$ é operador identidade e $p(t) \doteq a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$, $t \in \mathbb{R}$.

Exercício 3. Achar os autovalores e autovetores do operador linear T definido em $\mathbb{R}^2$, isto é, $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, de modo que:

(a) $T(x,y) \doteq (x+y, x-y)$, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) $T(x,y) \doteq (-x,-y)$, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) $T(1,0) \doteq (0,-1)$, $T(0,1) \doteq (1,0)$.

Exercício 4. Achar os autovalores e autovetores do operador linear T definido em $\mathbb{R}^3$, de modo que:

(a) $T(1,0,0) \doteq (2,0,0)$, $T(0,1,0) \doteq (2,1,2)$ e $T(0,0,1) \doteq (3,2,1)$.

(b) $T(1,0,0) \doteq (0,0,0)$, $T(0,1,0) \doteq (0,0,0)$ e $T(0,0,1) \doteq (5,-1,2)$.

Exercício 5. Determinar os autovalores e autovetores do operador linear T definido em $\mathbb{R}^4$ cuja matriz em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$ é a seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercício 6. Seja $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a matriz de um operador linear T do $\mathbb{R}^2$ em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$. Encontre os autovalores do operador linear T. Existem, neste caso, dois autovetores linearmente independentes?

Exercício 7. Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$T(x,y) \doteq (-y, x)\,, \quad \text{para} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Mostre que operador linear T não admite autovetores (isto é, autovetores em $\mathbb{R}^2$).

Exercício 8. Determinar, se possível, uma matriz $M \in M_2(\mathbb{R})$ de maneira que a matriz quadrada $M^{-1}AM$ seja diagonal, nos seguintes casos:

(a) $A \doteq \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$ **(b)** $A \doteq \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercício 9. Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuja matriz em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$ é dada por $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Calcule os autovetores e os respectivos subespaços próprios (auto-espaços) associados ao operador linear T.
(b) Existe uma base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal?

Exercício 10. Seja $A \doteq \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$ a matriz de um operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Pergunta-se: o operador linear T é diagonalizável?

Exercício 11. Mostre que os autovalores de uma matriz triangular superior (respectivamente, inferior) são os elementos da sua diagonal principal.

Exercício 12. A matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ é diagonalizável? Caso afirmativo encontre a matriz inversível M que realiza a diagonalização.

Exercício 13. A matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ é diagonalizável? Caso afirmativo encontre a matriz inversível M que realiza a diagonalização.

Exercício 14. Suponha que $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ é o operador linear definido por:

$$T(p) \doteq q\,, \quad \text{para} \quad p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,,$$

onde

$$p(t) \doteq a_0 + a_1 t + a_2 t^2, \quad \text{e} \quad q(t) \doteq (5a_0 + 6a_1 + 2a_2) - (a_1 + 8a_2)t + (a_0 - 2a_2)t^2\,, \quad \text{para} \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a) Achar os autovalores do operador lineat T.
(b) Achar os autovetores do operador T.
(c) Determinar a dimensão e uma base para cada um dos auto-espaços associados ao operador linear T.
(d) O operador T é diagonalizável?

Exercício 15. Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ o operador linear definido por:

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & b \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{pmatrix}, \quad \text{para} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & b \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})\,.$$

(a) Achar os autovalores e os autovetores associados do operador linear T.
(b) T é diagonalizável? justifique sua resposta.

Exercício 16. Definimos o <u>**traço**</u> de uma matriz quadrada A como sendo a soma dos elementos da da diagonal principal.

Mostre que a equação característica associada a uma matriz 2×2 é dada por

$$\lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\,\lambda + \det(A) = 0,$$

onde $\operatorname{tr}(A)$ denota o traço da matriz A.

Exercício 17. Determinar uma matriz inversível $M \in M_2(\mathbb{R})$, se existir, de modo que $M^{-1}AM$ seja uma matriz diagonal nos seguintes casos:

(a) $A \doteq \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$ **(b)** $A \doteq \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Exercício 18. Verificar, em cada um dos itens abaixo, se o operador $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dado pela sua matriz com relação à base canônica $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ é diagonalizável.

(a) $[T]_{\mathcal{B}} \doteq \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ **(b)** $[T]_{\mathcal{B}} \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 2 & 0 \\ n & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exercício 19. Verificar em cada um dos itens abaixo se o operador $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ dado pela sua matriz com relação à base canônica $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ é diagonalizável.

(a) $[T]_{\mathcal{B}} \doteq \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ **(b)** $[T]_{\mathcal{B}} \doteq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$