```latex
\documentclass[12pt]{article}
\usepackage[brazil]{babel}
\usepackage[latin1]{inputenc}
\usepackage{amsmath,amssymb,bm, indentfirst}

\renewcommand{\baselinestretch}{1.1}
\newcommand{\iid}{\ensuremath{\stackrel{\mbox{\footnotesize iid}}{\sim}}}
%\newcommand{\ind}{\ensuremath{\stackrel{\mbox{\footnotesize indep.}}{\sim}}}

\hoffset=-0.675in
\advance\topmargin by -1in
\oddsidemargin=0.675truein
\evensidemargin=0.675truein
\advance\textheight by 1.25truein
\setlength\textwidth{6.5in}
\vsize=9.0in

\begin{document}
\thispagestyle{empty}
\begin{center}
PIPGEs ICMC -- USP/UFSCar \\
EST5102 -- Infer\^encia Estat\'istica -- 2024/1 \\ 5$^{\b{a}}$ lista de
exerc\'icios
\end{center}

\begin{enumerate}

\item Sejam $X \sim \textsf{normal}(\theta,1)$ e $\widehat{\theta}_{a,b}(X) = a X+b$
  um estimador de $\theta$, com $\theta$, $a$ e $b \in \mathbb{R}$,
  $a$ e $b$ conhecidas.
\begin{enumerate}
\item Calcule o erro quadr\'atico m\'edio (EQM) de $\widehat{\theta}_{a,b}(X)$.
\item  Represente graficamente o
EQM de $\widehat{\theta}_{1/2,0}(X)$ e $\widehat{\theta}_{1,0}(X)$ em
fun\c c\~ao de $\theta$. Pode ser afirmado que um
estimador \'e uniformemente melhor do que o outro em termos de EQM?
\end{enumerate}

\item Considere $X_1,\ldots,X_n \iid \textsf{uniforme}([\theta_1,
  \theta_2])$, $\bm \theta = (\theta_1,\theta_2)^\top \in
  \mathbb{R}^2$, com $\theta_1 <  \theta_2$.
\begin{enumerate}
\item Prove que $\bm T(\bm X) = (X_{(1)}, X_{(n)})^\top$ \'e uma estat\'istica
suficiente para $\bm \theta$, em que $X_{(1)} = \min(X_1,\ldots,X_n)$
e $X_{(n)} = \max(X_1,\ldots,X_n)$.
```

```latex
\item Pode ser provado que $\bm T(\bm
X)$ \'e completa. Apresente o estimador n\~ao viesado de vari\^ancia
uniformemente m\'inima (ENVVUM) de $\tau(\bm \theta) = (\theta_1+\theta_2)/2$.
\end{enumerate}

\item Considere $X_1,\ldots,X_n \iid
  \textsf{Poisson}(\theta)$. Apresente o ENVVUM de
  $\tau(\theta)=P_\theta(X_1=1)$.

\item Considere $X_1,\ldots,X_n \iid \textsf{Bernoulli}(\theta)$, $0
  \leq \theta \leq 1$.
Para $n \geq 4$, tome $j_1 \neq j_2 \neq j_3 \neq j_4$ pertencentes
ao conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$.  Prove que $X_{j_1} X_{j_2} X_{j_3} X_{j_4}$ é um
estimador
  não viesado de $\theta^4$. Este estimador é um ENVVUM de $\theta^4$?
  Se não for, obtenha um ENVVUM de $\theta^4$. Sua solu\c c\~ao \'e
\'unica?

\item A vari\'avel aleat\'oria $X$ tem distribui\c c\~ao binomial
  truncada em $0$ com fun\c c\~ao massa de probabilidade
$$f(x; \theta) = \displaystyle\frac{\binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}}{1 -
  (1-\theta)^n} \, I_{\{1,2,\ldots,n\}}(x). $$
\begin{enumerate}
\item Prove que $X$ \'e uma estat\'istica suficiente e completa para
$\theta$.
\item Apresente a fun\c c\~ao $\tau(\theta)$ para a qual $X/n$
\'e o  ENVVUM.
\end{enumerate}

\item Considere $X_1,\ldots,X_n \iid \textsf{normal}(\mu, \sigma^2)$,
  $n \geq 2$,
  $\mu \in \mathbb{R}$ e $0 < \sigma^2 < \infty$. Prove que $\bm
 X=(X_1,\ldots,X_n)^\top$, embora seja uma estat\'istica suficiente para
  $(\mu,  \sigma^2)^\top$, n\~ao \'e completa.

\item Para cada uma das distribuições abaixo, seja $X_1,\ldots,X_n$ uma
  amostra aleatória. Existe uma função $\tau(\theta)$ para a qual existe um
  estimador não viesado cuja variância é igual à cota inferior de Cramér-
Rao?
  Se existir, apresente $\tau(\theta)$; se não existir, justifique.
\begin{enumerate}
\item $$f(x; \theta) = \theta  x^{\theta-1} \,
I_{(0,1)}(x), \ \theta > 0. $$
\item $$f(x; \theta) = \frac{\log(\theta)}{\theta-1} \theta^x \, I_{(0,1)}(x), \ \theta > 1. $$
\end{enumerate}
```

```latex
\item Seja $X \sim \textsf{binomial}(n, \theta)$, $0
< \theta < 1$, $n>1$.
\begin{enumerate}
\item Prove que $X (n-X)/\{n (n-1)\}$ \'e o ENVVUM
  de $\tau(\theta) = \theta (1-\theta)$.
\item  O que representa $\tau(\theta)$?
\end{enumerate}

\item Considere $X_1,\ldots,X_n \iid \textsf{gama}(\alpha,\beta)$, $\alpha>0$,
  $\beta>0$, $\alpha$ e $\beta$  desconhecidos. Apresente o ENVVUM de
  $\alpha / \beta$.

\item Prove que em uma família exponencial uniparam\'etrica na forma
  canônica com fun\c c\~ao densidade $f(x;\eta) = \exp\{\eta \, T(x) + d_0(\eta) +
S(x)\}
 \, I_A (x)$, a informação de Fisher de $\eta$ é dada por
  ${\cal I}(\eta) = - \, d_0^{"}(\eta)$.

\end{enumerate}

\end{document}
```